ВВЕДЕНИЕ

Окружающий нас мир представляет собой совокупность материальных тел, находящихся в постоянном взаимодействии и непрерывном движении. Все наблюдаемые явления и процессы, совершающиеся в природе, происходят по определенным законам. Раскрытие и изучение закономерной связи между различными процессами и явлениями представляет главную цель науки.

Физическое явление – это совокупность закономерно связанных изменений, происходящих с определенными телами с течением времени. Все изменения, происходящие при физических явлениях, оцениваются количественно, посредством измерений. Можно смело утверждать, что наука начинается там и тогда, когда в нее вводятся измерения.

Физический опыт. Закономерные связи между различными изменениями, происходящими с телами, изучаются посредством наблюдения явлений, происходящих в природе, как в их естественном виде, так и посредством специально поставленных лабораторных опытов, в которых обеспечены определенные условия протекания явления.

Физические величины и физические измерения. Физика относится к классу точных наук, где количественное определение происходящих изменений играет главную роль.

Физические величины определяют свойства тел или характеристики процесса.

Измерение – сравнение данной величины с определенной величиной того же рода, принятой за единицу.

Физические законы. Все явления и процессы находятся в определенной причинной связи друг с другом. На основе опытов эти закономерные связи раскрываются, и устанавливается определенная причинная взаимосвязь между изменениями различных величин. На основе анализа опытов устанавливают основные закономерности, которым подчиняется течение различных процессов. Эти общие закономерности называют физическими законами.

Абстракции и упрощения. При анализе сложных процессов, где трудно проследить и выяснить основные причинные связи и закономерности, стараются, прежде всего, отделить главные закономерности и связи от второстепенных. Анализируя явление, выделяют главное, основное, отвлекаются от второстепенного; тем самым, создавая некую условную модель явления (материальная точка, идеальный газ, тонкая линза и т.д.). При этом всегда нужно помнить об ограниченности схематических представлений.

Система единиц. Всякая физическая величина определяется на основании закономерностей, полученных из опыта. Численное же значение получается в результате измерения данной величины путем сравнения ее с неким эталоном, условно принятым за единицу. Выбор эталона, или единицы измерения, произволен.

В физике произвольно устанавливают единицы только для некоторых основных величин. Тогда единицы остальных величин будут зависеть от основных. В используемой в настоящее время международной системе единиц (СИ) в качестве основных величин используются: длина (м), время (с), масса (кг), температура (К), сила тока (А), сила света (Кд).

Физика и техника. Физика очень тесно связана со всеми естественными науками, и, естественно, с техническими отраслями знания. Физические законы являются основными положениями целого ряда технических наук. Достижения физики всегда используются для решения насущных практических задач.

Нам хотелось бы убедить вас в том, что физика нужна инженеру всегда, во все время его деятельности. На нее нельзя смотреть как на предмет, который нужно (да и нужно ли?) – раз пройти, а потом можно забыть, так как ведь все равно то, что необходимо знать инженеру по физике, еще раз повторяется при прохождении специальных предметов.

Говоря, что инженеру нужна физика, мы имеем ввиду не только то, что он должен быть знаком с теми отдельными явлениями и законами, с которыми он непосредственно встречается в своей практической деятельности. Инженеру необходимо знание физики как цельной дисциплины с ее специфической методикой. Инженеру необходимо знать не только опытную часть физики, но и быть знакомым с теорией.

Не подлежит сомнению, что единственным средством, с помощью которого мы получаем знания, об окружающем нас мире, являются наши органы чувств. Но единичные чувственные восприятия слишком мимолетны и неустойчивы, чтобы служить материалом для дальнейшей переработки. И вот человек выделяет и фиксирует в памяти те общие черты отдельных восприятий, которые повторяются и которые для него практически важны. Этот процесс, совершающийся совершенно непроизвольно, ведет к образованию понятий.

В образовании понятий состоит первый шаг по пути познания природы. Они являются той базой, на которой строится дальнейшее.

Но образованные таким образом понятия не поддаются строгому определению. Слова здесь бессильны. Итак, одними словами первоначальным физическим понятиям научить нельзя. Вот почему, ни учебник, ни учитель, недостаточны, чтобы научить физике. Студент должен хоть немного работать опытно сам. Он должен хоть поверхностно, но сам слышать, осязать те явления, о которых ему говорят.

По мере того, как человечество увеличивало свой запас навязанных опытом знаний, появилась необходимость в систематизации этих знаний, без которой нет возможности разобраться в бесконечном обилии окружающих нас явлений.

Здесь на помощь нам приходит способность образовывать понятия другого рода, более определенные, более конкретные. В первую очередь сюда относятся понятия о числе и те понятия, которыми оперирует математика. В области математического мышления мы чувствуем себя несравненно более уверенно, чем при оперировании с опытным материалом. При помощи математических понятий можно определенно формулировать посылки и делать из них конкретные выводы и заключения.

И вот зная за собой эту силу человек, старается приспособить математические понятия и специально понятие о числе к сырому опытному материалу, к понятиям физическим.

В этом процессе перехода от качественных отношений к количественным заключается важнейший этап научной мысли. На нем основано понятие об измерении, так и сам процесс измерения физических величин. Можно смело утверждать, что любая наука становится наукой только с того момента, когда мы научаемся вводить в нее измерения.

Пользуясь математикой, мы стараемся найти систему в окружающих нас явлениях и облегчить себе, их понимание тем, что ищем такие математические формулы, которые охватывали бы возможно большее число единичных фактов или общую сторону явлений. Если такая формула найдена, то мы говорим о том, что нашли физический закон.

По мере того как число законов росло, возникает необходимость в систематизации этих законов. Так возникают физические теории. Теория есть орудие, без которого нельзя осмыслить окружающий нас мир.

Нельзя знать только опытную часть физики, не только потому, что это слишком мало, а потому, что это слишком трудно. Более или менее полное знание опытной физики без помощи теории человеку не под силу.

Пуанкаре сравнивал всю физику с огромной библиотекой. Отдельные опытные факты это книги, из которых она состоит. Теория – это каталог этой библиотеки. Как без каталога библиотека, особенно большая, представляет собой лишь сборище книг, пусть очень ценных, которыми продуктивно пользоваться нельзя. Физика без теории не наука, а довольно малоценный конгломерат отдельных фактов, разобраться в котором нет возможности.

Чтобы продуктивно работать, инженеру недостаточно прочесть и знать несколько книг из громадной библиотеки знания. Он должен быть знаком или уметь разбираться в каталоге этой библиотеки.

История науки и техники знает немало примеров загадочных неуспехов, неуспехов повторных и имевших весьма неприятные последствия. И очень часто оказывалось, что загадочность обуславливалась не присутствием новых, до сих пор неизвестных фактов, а отсутствием у тех, кто этим занимался широкого физического мышления.

Тема 1.1. Кинематика материальной точки.

1.1.1. Пространство и время. Механическое движение.

В различных физических явлениях мы встречаемся с различными физическими величинами. Но во всех явлениях мы встречаем, кроме других, пространство и время. Основной величиной, с помощью которой определяют пространственные свойства тел, является длина отрезка. Поэтому можно считать длину и время особыми физическими величинами.

Длина является мерой протяженности тел, время – мерой длительности процессов и явлений. Вне времени и пространства нет материи, нет явлений.

Движение тел происходит относительно друг друга, иными словами, при движении происходит изменение взаимного расположения тел или частей одного тела (деформация).

В каждом движении принимают участие, по крайней мере, два тела, поэтому для описания движения можно принять одно из тел за тело отсчета.

Как показывает опыт, в классической механике, свойства пространства не зависят от выбора тела отсчета и направления движения. Иначе говоря, при переходе от одной системы отсчета к другой необходимо учитывать только геометрические свойства системы отсчета, а не физические свойства тел, связанных с системой отсчета.

Механическое движение – это изменение положения тела в пространстве с течением времени. Измерение времени может быть произведено с помощью такого процесса, который периодически повторяется (например, часы). Опыт показывает, что в классической механике время не зависит от свойств тел и скорости их движения.

Описать движение тела означает указать для каждого момента времени положение тела и его скорость. Основная задача механики заключается в том, чтобы, зная начальное положение тела, а также законы, управляющие движением, определить его положение во все последующие моменты времени.

Нужно иметь в виду, что ни одна физическая задача не может быть решена абсолютно точно. Всегда получают приблизительное решение. Решая задачи приближенно, пренебрегают некоторыми факторами, которые в данном случае не существенны. Например, рассматривая движение тела его размерами можно в некоторых случаях пренебречь.

Тело, размерами которого можно пренебречь в данных условиях, называется материальной точкой. Вопрос о том можно ли данное тело рассматривать как материальную точку или нет, зависит не от размеров тела, а от условий решаемой задачи. Это возможно в двух случаях: при поступательном движении тела, когда все точки тела движутся одинаково и в случае, когда размерами тела можно пренебречь по сравнению с расстояниями, на которых рассматривается движение тела.

Для того, чтобы получить возможность описывать движение количественно, приходится с телом отсчета связывать какую-либо (например, декартову) систему координат. Тогда положение точки A можно однозначно определить, задав три числа (x, y, z) – координаты этой точки (рис. 1.). Положение точки относительно точки отсчета можно задать и радиус-вектором $\vec{r}$, соединяющим данную точку с телом отсчета. Если при координатном и радиус-векторном задании положения материальной точки использована одна и та же точка отсчета и одни и те же часы, то $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные орты

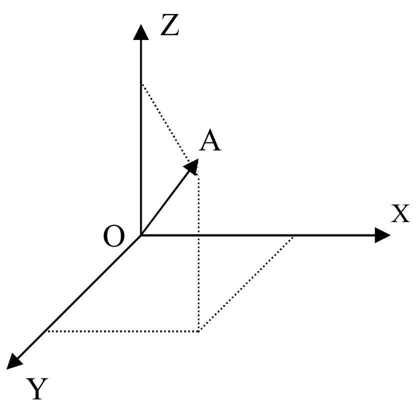

Рис. 1

осей. При движении тела с течением времени координаты материальной точки изменяются, т.е. они являются некоторыми функциями времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Эта система трех скалярных уравнений эквивалентна векторному уравнению $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Пусть материальная точка при своем движении переместилась из точки А в точку В (рис. 2). Линия, описываемая концом радиус-вектора $\vec{r}$ при движении точки, называется траекторией. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движение.

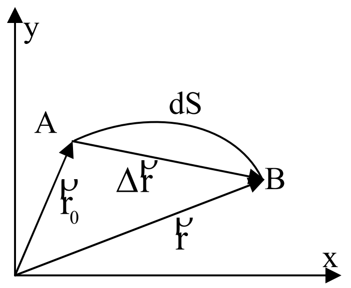

Рис. 2

Длина участка траектории АВ, все точки которого пройдены однократно, называется пройденным путем dS. Направленный отрезок прямой, соединяющий начальное положение точки с ее конечным положением называется вектором перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ (рис.2).

2.1.1. Скорость и ускорение точки.

Под скоростью понимают векторную величину, характеризующую не только быстроту изменения координаты точки (или радиус-вектора), но и направление, в котором движется точка в данный момент времени. Разобьем траекторию точки на малые участки длины ΔS (рис. 3). Каждому участку сопоставим малое перемещение $\Delta\vec{r}$. Разделив это перемещение на соответствующий промежуток времени Δt, получим среднюю скорость точки за это время

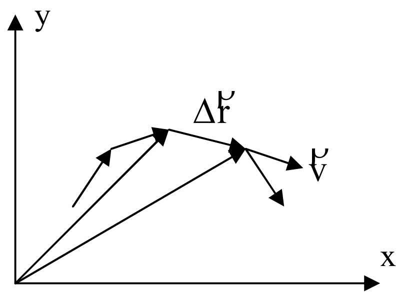

Рис. 3

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Предел, к которому стремится средняя скорость, при $\Delta t \to 0$ называется мгновенной скоростью точки

$$\lim\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}.$$

Таким образом, мгновенная скорость есть первая производная от координаты по времени. Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории в данной точке.

Очевидно, что

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{dy}{dt}\cdot\vec{j} + \frac{dz}{dt}\cdot\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{v} = v_x\cdot\vec{i} + v_y\cdot\vec{j} + v_z\cdot\vec{k}.$$

И тогда можно утверждать, что

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

В случае прямолинейного движения ось координат можно направит вдоль прямой по которой движется точки и тогда

$$v_y = v_z = 0, \quad v = v_x = \frac{dx}{dt}.$$

Путь, пройденный телом за время dt, очевидно, будет равен $dS = v(t) \cdot dt$.

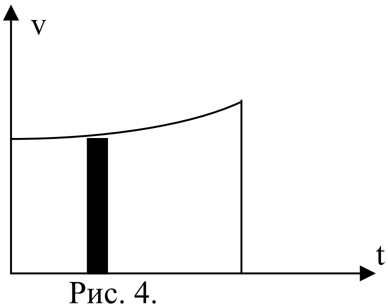

Рис. 4.

Для определения всего пути, пройденного за время t, это выражение надо проинтегрировать, т.е. $S = \int_0^t v(t) \cdot dt$.

Если изобразить графически зависимость $v(t)$, то пройденный путь можно представить как площадь фигуры, ограниченной осями координат, кривой $v(t)$ и моментом времени t (рис.4).

При равномерном движении $v = \mathrm{const}$ и тогда $S = x - x_0 = v \cdot t$ отсюда $x = x_0 \pm v \cdot t$ - это и есть кинематическое уравнение равномерного прямолинейного движения.

Среднее значение модуля скорости (средняя путевая скорость) в этом случае определяется по формуле $\langle v \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$.

При неравномерном движении скорость точки $\vec{v}$ изменяется как по величине, так и по направлению. Пусть за время Δt скорость точки изменилась на величину $\Delta\vec{v}$. Векторная величина $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ называется средним ускорением точки, а предел, к которому стремится среднее ускорение при $\Delta t \to 0$, называется мгновенным ускорением

$$\lim \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}.$$

Мгновенное ускорение есть первая производная от скорости по времени или вторая производная от радиус-вектора по времени.

В случае прямолинейного движения вектора $\vec{v}$ и $\vec{a}$ коллинеарные и тогда $v = \int_0^t a(t) \cdot dt$, т.е. зная ускорение точки $a(t)$, мы можем определить скорость точки в любой момент времени

При равноускоренном движении $a = \mathrm{const}$ и тогда $v = \int_0^t a \cdot dt = a \cdot t + C$. Произвольную постоянную C можно найти из начальных условий, если в момент времени $t = 0$ $v = v_0$, то C = v_0 и $v = v_0 \pm a \cdot t$. Для пути пройденного телом при равноускоренном движении получим $S = \int_0^t (v_0 \pm a \cdot t)dt = v_0 \cdot t \pm \frac{a \cdot t^2}{2}$.

Кинематическое уравнение движения будет иметь вид $x = x_0 \pm v_0 \cdot t \pm \frac{a \cdot t^2}{2}$.

В случае криволинейного движения вектор ускорения может образовывать с вектором скорости произвольный угол. Для простоты рассуждений разложим вектор ускорения $\vec{a}$ на две составляющие, одну из которых $\vec{a}_\tau$ направим вдоль вектора скорости (тангенциальная составляющая), а вторую $\vec{a}_n$ – в направлении перпендикулярном ему (рис.5.) Легко убедиться в том, что $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

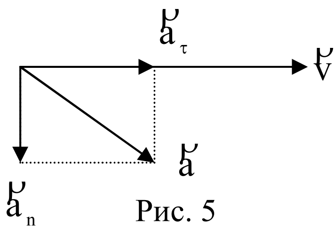

Рис. 5

Тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по величине и поэтому $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ и направлено вдоль вектора скорости, т.е. по касательной к траектории. Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. Определим величину нормального ускорения. Пусть за время dt скорость точки изменилась на величину $\Delta\vec{v}$. Разложим вектор $\Delta\vec{v}$ на две составляющие - нормальную $\Delta\vec{v}_n$ и тангенциальную $\Delta\vec{v}_\tau$ (рис. 6.). Очевидно, что $\frac{\Delta v_n}{v} = \frac{AB}{R}$. Так как $AB = v \cdot dt$, то $\Delta v_n = \frac{v^2}{R} \cdot dt$ и, следовательно $a_n = \frac{\Delta v_n}{dt} = \frac{v^2}{R}$. Нормальное ускорение, будучи перпендикулярным, к вектору скорости, являющейся касательной к траектории, направлено по радиусу к центру окружности и поэтому иногда называется центростремительным ускорением.

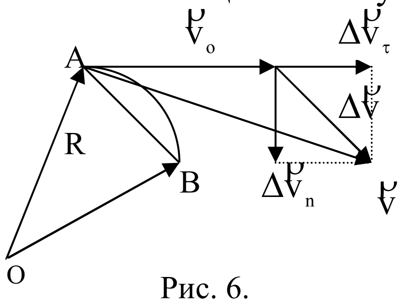

Рис. 6.

3.1.1. Кинематика вращательного движения.

Вторая абстракция, с которой мы имеем дело в механике, - это абсолютно твердое тело. В природе нет совершенно недеформирумых тел, однако во многих случаях деформациями тел при их движении можно пренебречь. Абсолютно твердым телом, называется тело деформациями которого можно пренебречь в данных условиях.

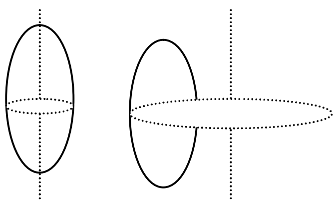
Рис. 7.

Всякое движение твердого тела можно разложить на поступательное и вращательное.

При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Ось вращения может проходит через тело, но может находиться и вне тела (рис.7).

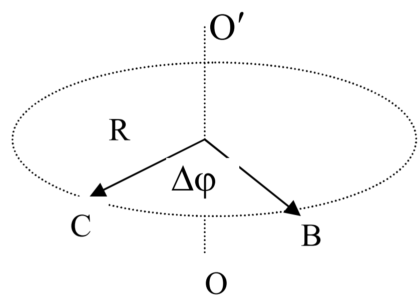

Рис. 8.

Пусть тело вращается вокруг оси OO'. В начальный момент времени положение точки С определяется радиусом R. Положение точки через промежуток времени Δt (точка В) можно задать углом $\Delta\varphi$, на который поворачивается радиус-вектор, соединяющий точку с осью вращения – угол поворота (рис.8.). Угол поворота определяется отношением длины дуги ВС к радиусу окружности, т.е. $\Delta\varphi = \frac{BC}{R} = \frac{\lambda}{R}$, измеряется в радиан. Легко показать, что полная окружность образует угол поворота равный 2π радиан.

Величину равную отношению угла поворота к промежутку времени, в течение которого совершен этот поворот, называют средней угловой скоростью, $\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, а предел, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \to 0$ называется мгновенной угловой скоростью, $\lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$.

Угловая скорость есть первая производная от угла поворота по времени. Угловая скорость – псевдовектор и его направление определяется с помощью правила правого винта. Если головку правого винта вращать в направлении вращения тела, то направление поступательного движения винта даст направление вектора угловой скорости.

Отдельные точки вращающегося тела имеют различные линейные скорости. Величина скорости v определяется угловой скоростью ω и расстоянием R точки от оси вращения. Пусть за время dt тело повернулось на угол $d\varphi$. Точка находящаяся на расстоянии R от оси вращения пройдет при этом расстояние $d\lambda = R \cdot d\varphi$. Линейная скорость точки $v = \frac{d\lambda}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} = R \cdot \omega$.

Вращение с постоянной угловой скоростью называется равномерным вращением и в этом случае $\varphi = \omega \cdot t$ (сравните, $S = v \cdot t$).

Равномерное вращение можно характеризовать периодом обращения T или частотой обращения ν. *Периодом обращения называется промежуток времени, в течение которого тело совершает полный оборот,* и тогда, $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Частота обращения $\nu = \frac{1}{T}$ и, следовательно, $\omega = 2\pi \cdot \nu$.

При неравномерном вращении вектор угловой скорости может изменяться как по величине (изменение скорости вращения), так и по направлению (за счет поворота оси вращения). Пусть за время Δt угловая скорость изменилась на величину $\Delta\omega$. Тогда величину $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ называют средним угловым ускорением, а предел, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \to 0$,называется мгновенной угловой скоростью, т.е.

$$\lim \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon .$$

<u>Угловое ускорение есть первая производная от угловой скорости по времени или вторая производная от угла поворота по времени.</u>

Так как $\omega = \dfrac{v}{R}$, то $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{1}{R} \cdot \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{a_\tau}{R}$.

<u>4.1.1. Аналогия между формулами кинематики поступательного и вращательного движения</u>

Величина	Поступательное	Вращательное
Перемещение	$\vec{r}$	φ
Скорость	$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$	$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$
Скорость	$v = v_0 \pm a \cdot t$	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t$
Пройденный путь	$S = v_0 \cdot t \pm \dfrac{a \cdot t^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 \cdot t \pm \dfrac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$

Тема 2.1. Динамика материальной точки.

Кинематика рассматривает движение тел, не интересуясь причинами, обуславливающими это движение и его изменение.

В основе динамики, которая изучает причины движения и его изменения, лежат законы Ньютона. Эти законы относятся к фундаментальным законам природы и доказать их справедливость или опровергнуть можно только опытом.

Движения тел относительно друг друга имеют самый различный характер, который с течением времени может изменяться. Эти изменения происходят различным образом. Но во всех случаях изменение движения сопровождаются, прежде всего, определенным изменением скорости тела: скорость тела изменяет свою величину, или направление, или и то и другое вместе. Следовательно, можно предположить, что взаимодействия, вызывающие изменение скорости тела, закономерно связаны со скоростью движения.

Эта мысль возникает, прежде всего тогда, когда пытаются найти законы движения тел. Именно так поступил Аристотель, который разделил все движения на естественные и принудительные (воздействие со стороны других тел на данное тело определяет его скорость).

Галилей на основании тщательного анализа результатов своих опытов решительно отверг это положение и пришел к выводу: свойство тела сохранять свою скорость постоянной лежит в самой его природе, в то время как причина ускорения или замедления движения является внешней. Галилей опроверг ложное мнение Аристотеля о том, что более тяжелые тела должны падать быстрее, чем легкие. Впоследствии этот вывод был подтвержден Ньютоном, который наблюдал падение тел в трубке, из которой был откачан воздух.

Три основных закона динамики были, сформулированные Ньютоном, были известны и до него. В своем трактате «Математические начала натуральной философии» он писал: Я излагал начала, принятые математиками и подтверждаемые многочисленными опытами. Пользуясь первыми двумя законами…. Галилей нашел, что падение тел пропорционально квадрату времени. Из этих же двух законов и третьего кавалер Христофер Врен, Иоганн Уоллис и Христиан Гюйгенс, величайшие геометры нашего времени, вывели законы удара и отражения тел.

Но до Ньютона не было представления о том, что эти законы являются основой всей механики. Только Ньютон, исследуя и анализируя движения всевозможных тел, указал, что все сколь угодно сложные механические явления подчинены трем законам динамики, только ему удалось построить стройное здание механики.

1.2.1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отсчета.

Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерно прямолинейного движения до тех пор, пока действие на него со стороны других тел не заставит его изменить это состояние. Явление сохранения скорости движущимся телом получило название инерции и поэтому первый закон Ньютона носит название закона инерции.

Иногда горят, что при равномерном и прямолинейном движении тело движется по инерции. Это не следует понимать так, что тело движется вследствие *инерции*. Для того, чтобы тело сохраняло свою скорость постоянной не нужно никаких причин. Движение с постоянной скоростью или покой – естественные состояния всякого тела освобожденного от внешних воздействий. Инерция не причина движения, а его свойство.

В кинематике все системы отсчета равноправны и выбор той или иной системы обусловлен лишь простотой математического описания движения тела.

Иначе обстоит дело в динамике. Одно и тоже движение тела в различных системах отсчета будет различным (относительность движения). *Системы отсчета относительно, которых выполняется первый закон Ньютона, получили название инерциальных систем отсчета.* Существование инерциальных систем отсчета постулируется (принимается без доказательства) в классической механике. Но если есть хотя бы одна инерциальная система отсчета, то любая другая система. Движущаяся относительно нее равномерно и прямолинейно, так же будет являться инерциальной системой.

2.2.1. Сила. Масса. Импульс.

Как показывает опыт, воздействие со стороны других тел является не причиной движения, а причиной его изменения, т.е. ускорения.

Опыт показывает, что при одинаковых воздействиях различные тела приобретают различные ускорения. Таким образом, мы можем утверждать, что ускорение тела в процессе взаимодействия зависит не только от внешнего воздействия, но и от свойств самого тела, от его способности противодействовать внешнему воздействию. Это свойство тел получило название *инертности.* Чем больше инертность тела, тем меньшее ускорение оно получает под действием постоянного внешнего воздействия. *Инертность тела проявляется только в динамических явлениях, и поэтому она может быть определена из динамических опытов с ускоряющимися телами.*

Мерой инертности тела является физическая величина называемая массой тела. Масса – как мера инертных свойств тела проявляется в поступательном движении и может быть вычислена по второму закону Ньютона.

Масса величина скалярная. Масса величина аддитивная, т.е. масса системы тел m равна сумме масс m_i тел, составляющих систему, $m = \sum m_i$.

Распределение массы по объему тела принято характеризовать плотностью, физической величиной определяемой выражением $\rho = \dfrac{m}{V}$ (при равномерном распределении) или $\rho = \dfrac{dm}{dV}$ при неравномерном. Отсюда следуют соотношения $m = \rho \cdot V$ или $m = \int \rho \cdot dV$.

Масса тел, введенная на основе инерции тел, называется инертной массой.

В специальной теории относительности аналогом инертной массы является величина $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, где $\beta = \dfrac{v}{c}$, называемая релятивистской массой или массой движения. В отличие от нее масса m_0 называется массой покоя.

В классической механике рассматриваются движения тел со скоростями v значительно меньшими скорости света c, т.е. $v << c$ и поэтому можно считать, что масса тела остается величиной постоянной.

Опыт показывает, что причиной появления ускорения является не компенсированное действие со стороны других тел, при этом действие это носит взаимный характер и поэтому называется взаимодействием.

Сила – физическая величина, характеризующая взаимодействие, по крайней мере, двух тел, в результате, которого тела приобретают ускорение или деформируются. Сила – абстракция, за которой стоит некий реальный фактор (другое тело, поле). Сила - вектор.

Введение понятия силы мы фактически разделяем механическую задачу о движении нескольких взаимодействующих тел на две: в первой – определяем силы, действующие на каждое тело, во второй – движение данного тела под действием приложенных сил.

В общем случае сила зависит от относительного расположения тел и скорости движения тел или их частей. Например,

$F = G\dfrac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$ - сила всемирного тяготения,

$F = -kx$ - сила упругости,

$F = 6\pi \cdot \eta \cdot v \cdot R$ - сила сопротивления при движении шарика в вязкой среде.

Опыт показывает, что в результате взаимодействия тел их скорости получают приращения $\Delta\vec{v}_1$ и $\Delta\vec{v}_2$. Эти приращения направлены в разные стороны и поэтому $\dfrac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = -\dfrac{m_2}{m_1}$ или $m_1 \cdot \Delta v_1 = -m_2 \cdot \Delta v_2$. Так как масса от скорости не зависит, то ее можно внести под знак изменения и $\Delta(m_1 \cdot \vec{v}_1) = -\Delta(m_2 \cdot \vec{v}_2)$.

Физическая величина равная произведению массы тела на его скорость называется импульсом тела. Импульс – вектор, направление которого совпадает с направлением вектора скорости тела.

Теперь мы можем написать, что при взаимодействии двух тел $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$, т.е. измерения импульсов тел равны по величине и противоположны по направлению.

3.2.1. Второй и третий законы Ньютона.

Согласно второму закону Ньютона скорость изменения импульса тела равна силе, действующей на тело:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Подставляя значение $\vec{p}$ и, учитывая постоянство массы тела, можно получить

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \text{или} \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

Уравнение $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ называют основным уравнением динамики поступательного движения или динамическим уравнением движения.

При этом необходимо отметить, что система уравнений будет полной только в том случае, когда четко определены начальные условия. Действительно, из уравнения движения следует, что $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{F}{m}$ или $dv = \dfrac{F}{m}dt$. Дифференцируя полученное равенство можно найти скорость тела $v = \int \dfrac{F}{m}dt + C_1$ и тогда $r = \int\left(\int \dfrac{F}{m}dt + C_1\right)dt + C_2$, где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования – неопределенные постоянные, делающие функции $v = v(t)$ и $r = r(t)$ неопределенными. Эта неопределенность может быть снята заданием начальных условий.

Например, тело, упавшее с полки в движущемся вагоне, относительно вагона и относительно земли движется по-разному, хотя силы, действующие на него одинаковы. Различие состоит в начальных условиях: начальная скорость тела относительно вагона равна нулю, а относительно земли равна скорости движения вагона.

Третий закон Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ утверждает, что тела при взаимодействии действуют друг на друга с силами равными по величине и противоположными по направлению. Эти силы имеют одну и ту же природу, они приложены к различным телам и не имеют равнодействующей. Однако, если эти тела рассматривать как одну систему, то сумма сил взаимодействия равна нулю и такие силы называются внутренними силами.

4.2.1. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности.

Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся относительно друг друга с некоторой посто0янной скоростью $\vec{u}$. Для простоты дальнейших рассуждений будем одну из систем (например, O,X,Y,Z) считать неподвижной, а система (O, X', Y', Z') движется относительно нее со скоростью $u_x = u = const$. Пусть в начальный момент времени эти системы совпадают. Тогда для момента времени t, для некоторой точки P мы можем утверждать, что $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$ и $\vec{r}_0 = \vec{u} \cdot t$ или в скалярной форме $x = x' + u \cdot t$, $y = y'$, $z = z'$ (рис.9.).

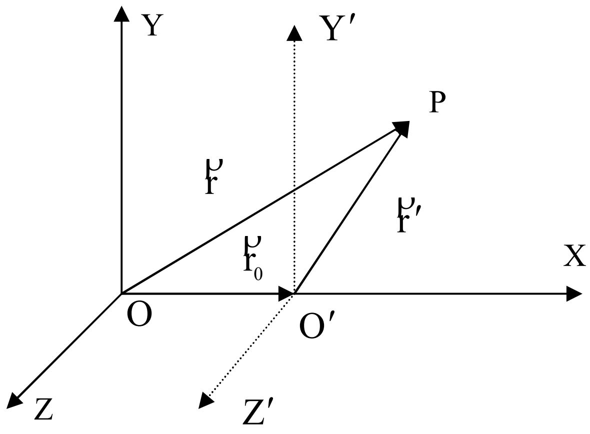

Рис. 9.

Добавим к этим уравнениям принятое в классической механике утверждение о том, что время течет одинаково во всех инерциальных системах отсчета, т.е. $t = t'$. Полученная система уравнений называется преобразованиями Галилея:

$$\begin{array}{l} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{u} \cdot t \\ t = t' \end{array} \quad \text{или в скалярной форме} \quad \begin{array}{l} x = x' + u \cdot t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{array} .$$

Дифференцируя эти уравнения, получим в векторной форме

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

или в проекциях на оси

$$\begin{aligned} v_x &= v'_x + u \\ v_y &= v'_y \\ v_z &= v'_z \end{aligned}.$$

Обе системы уравнений выражают собой важнейший для кинематики принцип независимости движений и закон сложения скоростей в классической механике.

Так как ускорение есть первая производная от скорости тела по времени, то дифференцируя последнее равенство, можно получить, что $\vec{a} = \vec{a}'$, т.е. ускорение точки в обеих системах координат будет одинаковым. А это означает, что и силы, действующие на тело, будут равны в обеих системах отсчета, т.е. $\vec{F} = \vec{F}'$. Следовательно, система отсчета движущаяся относительно инерциальной системы отсчета равномерно и прямолинейно, также будет инерциальной. Другими словами можно сказать, что уравнения динамики будут одинаковыми при переходе от одной инерциальной системы к другой или как говорят физики «*законы механики инвариантны относительно преобразований Галилея*».

И теперь мы можем сформулировать механический принцип относительности: ни какими механическими опытами нельзя обнаружить движение одной инерциальной системы относительно другой.

Тема 3.1. Силы в природе.

В современной физике различают четыре вида взаимодействия: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое. В рамках классической механики мы имеем дело с гравитационным и электромагнитным взаимодействием, которые являются фундаментальными – их нельзя свести к другим, более простым. Силы упругости и трения, с которыми мы имеем дело в механике, не являются фундаментальными, так как обусловлены взаимодействием молекул вещества между собой. Законы фундаментальных взаимодействий очень просты: закон Кулона $F = k \cdot \frac{q_1 q_2}{R^2}$, или сила Лоренца $F = k \cdot q \cdot [v \cdot B]$. При этом эти формулы являются точными.

Для сил упругости и трения можно получить только приближенные эмпирические формулы.

1.3.1. Силы трения.

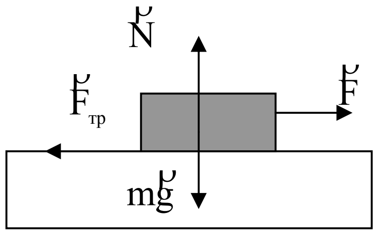

Рис.10.

Силы трения появляются при перемещение двух соприкасающихся тел или частей тела относительно друг друга. *Трение, возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называется внешним; трение между частями одного и того же тела – называется внутренним.*

Силы трения направлены по касательной к трущимся поверхностям, причем так, что они противодействуют относительному смещению этих поверхностей.

В случае сухого трения, сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но также и при попытках вызвать такое смещение. В этом случае сила трения называется *силой трения покоя*.

Рассмотрим два соприкасающихся тела 1 и 2 (рис. 10). Попытаемся переместить тело 1, подействовав на него внешней силой $\vec{F}$. Опыт показывает, что для каждой пары тел, имеется определенное значение $\vec{F}_0$ силы $\vec{F}$, при котором тело 1 удается сдвинуть с места. При значениях действующей силы F, удовлетворяющей неравенству $0 \le F \le F_0$, тело остается в покое. Из первого закона Ньютона следует, что в этом случае сила $\vec{F}$ уравновешена равной ей по величине и противоположной по направлению силой $\vec{F}_{тр}$, которая и называется силой трения покоя (рис. 10).

Опыт показывает, что максимальная сила трения покоя $\vec{F}_0$ равна

$$F_0 = \mu \cdot N,$$

где N – сила нормального давления, μ - безразмерный коэффициент, зависящий от рода соприкасающихся тел и чистоты обработки поверхности и называемый коэффициентом трения.

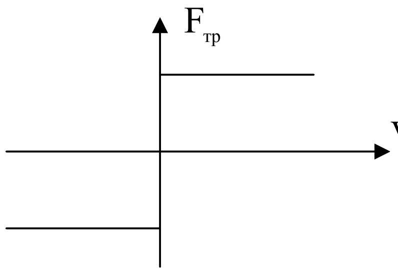

Рис. 11.

Если сила $\vec{F}$, действующая на тело, превосходит $\vec{F}_0$, то тело начинает скользить, причем его ускорение определяется равнодействующей двух сил, внешней $\vec{F}$ и силы трения скольжения $\vec{F}_{тр}$, величина которой равна максимальному значению силы трения покоя $\vec{F}_0$.

При малых скоростях движения силу сухого трения можно считать постоянной, не зависящей от скорости. График зависимости силы трения от скорости приведен на рисунке 11.

В отличие от сухого вязкое трение (трение между слоями жидкости или газа) характерно тем, что сила вязкого трения обращается в нуль одновременно со скоростью. Поэтому, как бы ни была мала внешняя сила, она может сообщить относительную скорость слоям вязкой среды.

Следует иметь в виду, что, помимо сил трения, при движении в жидкости или газе возникают силы сопротивления среды, которые могут быть гораздо больше сил трения. Характерной особенностью этих сил является их зависимость от скорости движения тела и его формы. При небольших скоростях силы сопротивления пропорциональны скорости, а при больших – линейная зависимость переходит в квадратичную, т.е. сила начинает расти пропорционально квадрату скорости.

2.3.1. Силы упругости. Закон Гука.

Под влиянием внешних сил всякое тело деформируется, т.е. изменяет свою форму или размеры. Если деформация полностью исчезает после снятия внешних сил, то она называется упругой.

По закону экспериментально установленному Р. Гуком *сила упругости прямо пропорциональна величине деформации и направлена в сторону, противоположную направлению смещения частиц тела при деформации:*

$$F = -k \cdot x,$$

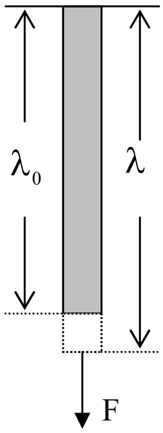

Рис. 12

где k - жесткость тела, x – величина деформации.

Рассмотрим деформацию одностороннего растяжения (сжатия). Пусть на стержень длиной λ_0 и площадью поперечного сечения S действует внешняя сила F, направленная перпендикулярно сечению стержня. Под действием этой силы стержень растягивается, и его длина становится равной λ. Величину равную $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ называют *абсолютным удлинением (деформацией)* стержня, а величину $\varepsilon = \dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ *- относительным удлинением (деформацией)*. Величина равная отношению силы F к площади поперечного сечения стержня S называется механическим напряжением $\sigma = \dfrac{F}{S}$.

Опыт показывает, что *при упругой деформации относительное удлинение образца прямо пропорционально механическому напряжению,* т.е. $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$, где α - коэффициент упругости, зависящий от рода материала и его обработки. Наряду с коэффициентом упругости α для характеристики упругих свойств тел пользуются обратной ему величиной, $E = \dfrac{1}{\alpha}$, которая называется *модулем Юнга.* Используя модуль Юнга, закон Гука можно записать в виде $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$.

Если относительное удлинение равно единице, то механическое напряжение равно модулю Юнга. *Отсюда следует, что модуль Юнга численно равен механическому напряжению, растягивающему образец вдвое.*

При деформации тела совершается работа. Величину этой работы можно определить следующим образом. Так как сила упругости линейно растет с увеличением $\Delta\lambda$, то $A = F_{ср} \cdot \Delta\lambda$. Из закона Гука $F = E \cdot S \cdot \varepsilon$ и тогда $F_{ср} = \dfrac{F + 0}{2} = \dfrac{1}{2} E \cdot S \cdot \varepsilon$. С учетом этого получим $A = \dfrac{1}{2} E \cdot S \cdot \varepsilon \cdot \Delta\lambda$, так как $V = S \cdot \Delta\lambda$, то $A = \dfrac{1}{2} E \cdot V \cdot \varepsilon$, где V – объем образца, ε - относительная деформация, E – модуль Юнга.

Эта работа идет на изменение потенциальной энергии образца и, следовательно, потенциальная энергия упруго деформированного тела определяется по формуле $W = \frac{1}{2} E \cdot V \cdot \varepsilon$.

3.3.1 Сила всемирного тяготения. Сила тяжести. Вес тела.

Закон всемирного тяготения был сформулирован Ньютоном – *сила всемирного тяготения прямо пропорциональна произведению масс тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между центрами тел, т.е.*

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2},$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ - гравитационная постоянная, *численно равная силе взаимодействия двух тел единичной массы, находящихся на единичном расстоянии друг от друга.*

Под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым ускорением, равным ускорению свободного падения $\vec{g}$. Это означает, что на всякое тело массы m действует сила $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$, называемая силой тяжести.

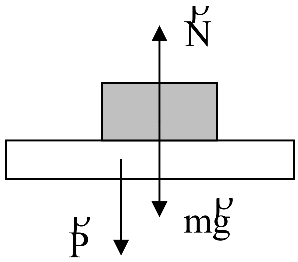

Рис. 13

Когда тело покоится относительно Земли, сила тяжести уравновешивается силой реакции опоры (или подвеса), удерживающих тело от падения (рис.13). По третьему закону Ньютона, тело будет действовать на опору (или подвес) с силой $\vec{P}$, равной по величине $\vec{N}$ и противоположной ей по направлению, т.е. $\vec{P} = -\vec{N}$. *Сила с которой тело действует на опору или подвес, вследствие притяжения к земле, называется весом тела.* В случае, когда тело движется с некоторым ускорением $\vec{a}$, вес тела определяется по формуле $\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$. Если $\vec{a} = \vec{g}$, то $P = 0$ - невесомость.

Связь между массой и весом тела дает способ сравнения масс тел путем взвешивания. Отношение веса тел, определенного в одинаковых условиях в одной и той же точке земной поверхности, равно отношению масс этих тел:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1}{m_2} \quad \Rightarrow \quad m_2 = m_1 \cdot \frac{P_2}{P_1},$$

если $P_2 = P_1$, то и $m_1 = m_2$.

4.3.1. Силы инерции.

Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета и ускорение тела в любой системе отсчета равно $\vec{a}$.

Неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальной системы отсчета с некоторым ускорением $\vec{a}_0$, поэтому ускорение тела в неинерциальной системе отсчета $\vec{a}'$ будет отличаться от $\vec{a}$. Тогда можно написать $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$.

Пусть равнодействующая всех сил, действующих на тело, равна $\vec{F}$. Тогда из второго закона Ньютона можно найти, что ускорение тела относительно инерциальной системы отсчета будет равно $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$. Ускорение тела относительно неинерциальной системы отсчета $\vec{a}' = \dfrac{\vec{F}}{m} - \vec{a}_0$. Отсюда следует, что даже при $\vec{F} = 0$, тело будет двигаться относительно неинерциальной системы отсчета с ускорением $-\vec{a}_0$, т.е. так, как если бы на него действовала бы сила, равная $\vec{F}_i = -m \cdot \vec{a}_0$. Эта сила получила название силы инерции.

Рассмотрим некоторые примеры.

а) Неинерциальная система движется прямолинейно с ускорением $\vec{a}$, относительно этой системы тело покоится.

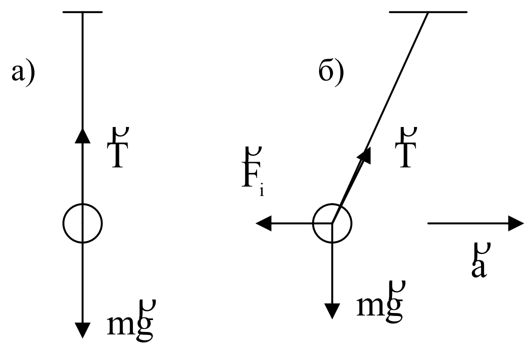

Рис. 14.

Рассмотрим вагон, к потолку которого подвешен нити шар. Пока вагон движется равномерно и прямолинейно нить расположена вертикально и сила натяжения нити $\vec{T}$ уравновешивает силу тяжести $m\vec{g}$ (рис.14 а). Если вагон начинает двигаться с ускорением $\vec{a}$, нить отклоняется от вертикали на такой угол, чтобы результирующая сил $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ сообщала шарику ускорение, равное $\vec{a}$ (рис 14 б). Но относительно вагона шарик покоится, несмотря на то, что результирующая сил $m\vec{g}$ и $\vec{T}$, отлична от нуля. Отсутствие ускорения шарика относительно вагона, формально можно объяснить тем, что на него действует сила инерции $\vec{F}_i = -m \cdot \vec{a}$ и тогда сумма сил, приложенных к шарику, будет равна нулю.

б) Система отсчета вращается, относительно нее тело покоится.

Рассмотрим диск, вращающийся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Вместе с диском вращается надетый на спицу шарик, соединенный с центром диска пружиной (рис. 15). Шарик занимает на спице такое положение, при котором сила упругости пружины сообщает ему центростремительное ускорение $\vec{a} = \omega^2 \cdot R$ и, следовательно, сила упругости пружины равна $F = m \cdot \omega^2 \cdot R$. Но относительно диска шарик покоится. Это можно объяснить тем, что на него действует сила инерции $\vec{F} = -m \cdot \omega^2 \cdot R$, направленная вдоль радиуса от центра диска. Поэтому эту силу называют центробежной силой инерции.

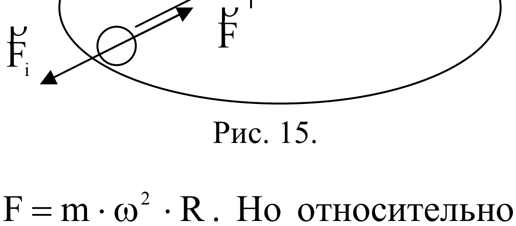

Рис. 15.

в) Система отсчета вращается, тело относительно нее движется с некоторой скоростью $\vec{v}$.

Рассмотрим диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси с некоторой угловой скоростью ω. Запустим в направлении от О к А шарик со скоростью $\vec{v}$. Если диск неподвижен, то шарик будет двигаться по радиусу ОА.

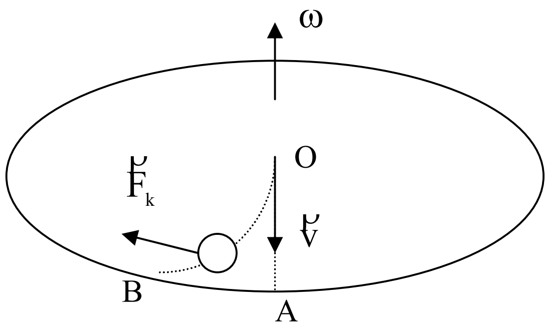

Рис. 16

Если же диск привести во вращение, с угловой скоростью ω, то шарик будет двигаться по кривой ОВ (рис. 16), причем его скорость будет изменять направление. Следовательно, по отношению к неинерциальной системе отсчета шарик ведет себя так, как если бы на него действовала сила $\vec{F}_k$ перпендикулярная скорости. Эта сила получила название <u>*силы Кориолиса*</u> и определяется она по формуле $\vec{F}_k = 2m[\vec{v} \cdot \vec{\omega}]$.

Силы Кориолиса необходимо учитывать при движении тел относительно Земли, так как земля вращается относительно оси. Например, свободно падающее тело отклоняется к востоку. Летящий снаряд отклоняется к востоку при выстреле на север и к западу, при выстреле на юг. Снаряд, летящий вдоль параллели сила Кориолиса будет прижимать к Земли при выстреле на запад, и поднимать при выстреле на восток. Вот почему космические спутники всегда запускают в направлении на восток. Действием силы Кориолиса объясняется неравномерный износ рельсов железной дороги и берегов рек.

Введение в рассмотрение сил инерции не является принципиально необходимым. В принципе всегда можно найти инерциальную систему отсчета, относительно которой можно рассмотреть движение. Однако на практике часто представляет интерес как раз движение тела по отношению к инерциальной системе отсчета (например, центробежный насос).

Силы инерции и силы тяготения пропорциональны массе тела и в этом аналогичны друг другу. Например, на груз находящийся в кабине лифта в поле тяготения Земли будет действовать сила $\vec{F} = m\vec{g}$. Но точно такая же сила будет действовать на груз в кабине лифта, который удален от внешних тел и движется с ускорением $\vec{g}$, направленным вертикально вверх (рис. 17). Таким образом, не имея возможности «выглянуть» из кабины лифта, мы не можем установить, чем обусловлена сила $\vec{F} = m\vec{g}$, действием гравитационного поля Земли или ускоренным движением кабины лифта.

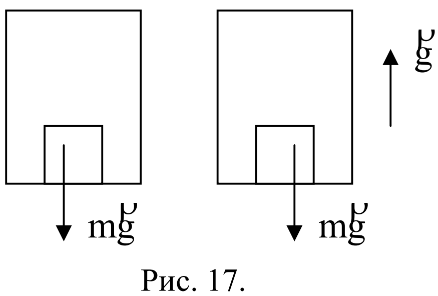

Рис. 17.

Эта аналогия позволила Эйнштейну сформулировать принцип эквивалентности: <u>*все физические явления протекают в поле сил тяготения, так же*</u>

как и в поле сил инерции. Этот принцип лежит в основе общей теории относительности.

Тема 4.1. Работа и энергия.

1.4.1. Работа и энергия.

Энергия – универсальная количественная мера движения и взаимодействия всех видов материи. С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, внутреннюю, электромагнитную и т.д.

В одних явлениях форма движения материи не изменяется (например, после упругого столкновения оба тела будут двигаться), в других – переходит в другую форму (например, при неупругом столкновении тел механическое движение переходит в тепловое). Однако существенно, что во всех случаях энергия, отданная (в той или иной форме) другому телу, равна энергии полученной этим телом.

Изменение механического движения тела происходит под действием силы, действующей на него со стороны других тел. Рассмотрим два примера. На горизонтальной поверхности находятся два автомобиля – один неподвижен, другой – движется с постоянной скоростью, т.е. равномерно и прямолинейно. На каждый автомобиль действует внешние силы: на первый – сила тяжести, на второй – сила тяги двигателя, но они не изменяют состояния своего движения.

Но есть принципиальная различие в явлениях описанных в этих двух примерах. На неподвижный автомобиль сила тяжести действует постоянно, но при этом ни каких изменений, ни в самом теле, ни в окружающих телах не происходит. Во втором случае действие силы тяги двигателя связано с определенными, довольно сложными, изменениями с окружающими телами.

С точки зрения механики различие в этих явлениях заключается в том, что в первом случае точка приложения силы остается в покое, а во втором – точка приложения движется с некоторой скоростью.

Чтобы количественно характеризовать процесс перехода энергии от одного тела к другому, в механике вводится физическая величина, называемая механической работой силы, приложенной к данному телу. Механическая работа мера превращения одного вида энергии в другой.

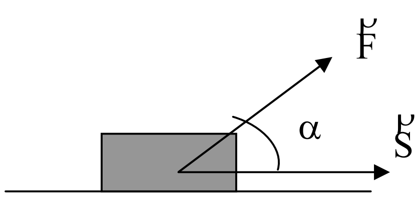

Рис. 18.

Если тело движется прямолинейно под действием постоянной силы $\vec{F}$, составляющей постоянный угол α с направлением перемещения $\vec{S}$, то работа этой силы определяется по формуле $A = F \cdot S \cdot \cos\alpha$.

В общем случае сила может изменяться как по величине, так и по направлению. Чтобы найти работу переменной силы, пройденный путь разбивается на большое число участков длиной dS, так чтобы их можно было считать прямолинейными, а действующую силу в любой точке данного участка – постоянной.

Тогда элементарная работа $dA = F_i \cdot dS_i \cdot \cos\alpha_i$, а работа переменной силы на всем пути будет равна сумме элементарных работ:

$$A = \int F_i \cdot dS_i \cdot \cos\alpha_i .$$

Для вычисления этого интеграла надо знать зависимость $F(S)$ вдоль траектории тела.

Рассмотрим некоторые примеры.

Определим работу, совершаемую силами упругости при деформации пружины, жесткость которой равна k. По закону Гука $F = -kx$, а $dS = dx$ и тогда $A = -\int k \cdot x \cdot dx = -\frac{kx^2}{2}$.

Работа силы всемирного тяготения при изменении расстояния между телами определится по формуле:

$$A = -\int_{R_1}^{R_2} G\frac{mM}{R^2}dR = G \cdot m \cdot M\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right).$$

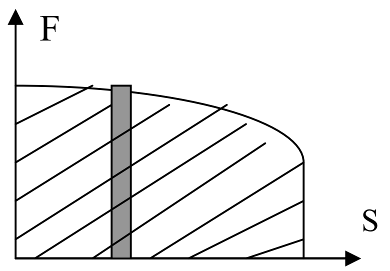

Рис. 19.

Если зависимость $F(S)$ представлена графически, то искомая работа равна площади фигуры, ограниченной осями координат и графиком зависимости $F(S)$ (рис. 19).

Если тело движется прямолинейно под действием постоянной силы, то $A = F \cdot S \cdot \cos\alpha$. Отсюда следует, что при $\alpha < \frac{\pi}{2}$ работа положительна, а при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, работа отрицательна. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, работа силы равна нулю. Если на тело действует не одна, а несколько сил, равнодействующая $\vec{F}$ которых равна $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$, то $dA = \vec{F} \cdot d\vec{S} = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)d\vec{S} = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{S} = \sum_i dA_i$

Для характеристики скорости совершения работы вводится физическая величина называемая мощностью. Если за время Δt совершается работа ΔA, то величина равная $N = \frac{\Delta A}{\Delta t}$ называется средней мощностью, а $N = \frac{dA}{dt}$ мгновенной мощность. Учитывая, что $dA = F \cdot dS$ можно получить $N = \frac{dA}{dt} = \frac{d(F \cdot S)}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Отсюда следует, что мгновенная мощность равна произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения силы.

<u>*2.4.1. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии.*</u>

Пусть тело движется под действием нескольких сил, равнодействующая которых равна $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$. Тогда по второму закону Ньютона $m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$. Умножив это уравнение на перемещение тела $d\vec{S} = \vec{v} \cdot dt$, получим

$m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Выражение в левой части этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции, т.е. $m \cdot v \cdot dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$, а $\vec{F} \cdot d\vec{S} = dA$ и тогда $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA$. Физическую величину $T = \frac{mv^2}{2}$ называют *кинетической энергией тела,* т.е. $dT = dA$. Проинтегрировав последнее выражение вдоль некоторой траектории от начальной точки 1 до конечной точки 2 получим:

$$\int_1^2 dT = \int_1^2 dA.$$

Левая часть этого выражения представляет собой разность значений кинетической энергии тела в точках 1 и 2, т.е. приращение кинетической энергии тела, а правая часть – работа силы $\vec{F}$ на пути $1 \to 2$, т.е. $T_2 - T_1 = A$.

Работа, равнодействующей всех сил, действующих на тело, равна изменению кинетической энергии тела.

3.4.1. Потенциальная энергия. Работа и изменение потенциальной энергии.

Если на тело в каждой точке пространства действует сила, зависящая от координат $F(x, y, z)$, то говорят, что тело находится в поле сил. Силовыми полями являются: гравитационное, электромагнитное, поле сил упругости и т.д. Если тело предоставить действию этих сил, то будет совершаться работа.

Некоторые из этих силовых полей характеризуются тем, что работа, совершаемая силами поля при перемещении тела, не зависит от формы и длины траектории, а зависит от начального и конечного положения тела в поле. Потенциальное поле можно описать с помощью функции $\varphi(x, y, z)$ такой, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = F_x$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = F_y$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = F_z$ и называемой потенциальной функцией (или потенциалом).

Добавление к функции $\varphi(x, y, z)$ произвольной постоянной C не изменяет значений F_x, F_y, F_z, так как производная от постоянной величины равна нулю. Поэтому потенциальная функция определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной C.

Так как $\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$ и $d\vec{S} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$, то $dA = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F_x dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$, учитывая значения проекций сил, получим $dA = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot dz$, т.е. $dA = d\varphi$.

Очевидно, что работа на конечном пути $A = \int d\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)$ равна приращению потенциальной функции поля.

Введем новую функцию $U(x, y, z)$ такую, что $U(x, y, z) = -\varphi(x, y, z)$ которую будем называть *потенциальной энергией.* Тогда работа сил поля $A = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$, т.е. работа равна изменению потенциальной энергии взятой с противоположным знаком.

В качестве примера определим работу силы тяжести $m\vec{g}$ при падении тела с высоты h_1 на высоту h_2 (рис. 20.). Если тело падает вертикально (рис. 20а), то $A = mg(h_1 - h_2)$. Если тело движется под некоторым углом α к вертикали (рис. 20б), то $A = m \cdot g \cdot S \cdot \cos\alpha$, но $S \cdot \cos\alpha = (h_1 - h_2)$ и тогда $A = mg(h_1 - h_2)$. Если тело движется по произвольной траектории, то ее можно разбить на малые участки длиной dS и тогда элементарная работа на пути dS определяется выражением $dA = m \cdot g \cdot dS \cdot \cos\alpha$, но $dS \cdot \cos\alpha = dh$ и тогда $dA = m \cdot g \cdot dh$. Интегрируя полученное выражение в пределах от h_1 до h_2 получим:

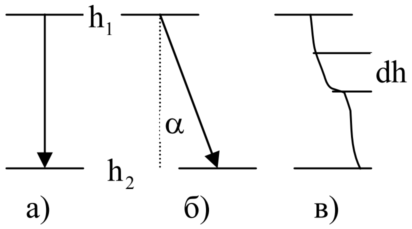

Рис. 20

$$A = \int_{h_2}^{h_1} mg \cdot dh = mg(h_1 - h_2) = -(mgh_2 - mgh_1).$$

Отсюда следует, что работа силы тяжести не зависит от формы и длины пути, а определяется начальным и конечным положением тела. Следовательно, сила тяжести является консервативной силой, а потенциальная энергия тела поднятого над Землей определяется по формуле $U = mgh$.

В случае, когда тело деформируется под действием внешней силы, точка приложения деформирующей силы перемещается, и система, со стороны которой действует сила, совершает работу, являющуюся мерой энергии перешедшей к деформированному телу. Если деформируется упругое тело, то работа идет на увеличение запаса энергии деформированного тела, которая называется потенциальной энергией упругой деформации.

Обычно величина деформации закономерно связана с величиной действующей силы: величина силы будет меняться с изменением деформации, и величина работы не будет равна произведению силы на перемещение, ибо сила переменна. В том случае, когда деформация пропорциональна действующей силе, легко подсчитать работу, которую необходимо совершить для осуществления заданной деформации. Допустим, необходимо деформировать пружину с жесткостью k от величины x_1 до x_2. Очевидно, что элементарная работа силы упругости $F = -kx$ будет равна $dA = -k \cdot x \cdot dx$, полная работа $A = -\int_{x_1}^{x_2} k \cdot x \cdot dx = -\left(\frac{k \cdot x_2^2}{2} - \frac{k \cdot x_1^2}{2}\right)$.

Отсюда следует, что потенциальная энергия упруго деформированного тела определяется по формуле $U = \frac{k \cdot x^2}{2}$.

В заключение обратим внимание на то, что потенциальная энергия (так же как и потенциальная функция) определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной С. Эта постоянная неизвестна и определена быть не может. Однако это не лишает физические законы их определенности, так как в них входит либо разность потенциальных энергий двух состояний системы, либо производная от потенциальной энергии по координатам. Поэтому при решении задач нулевой уровень потенциальной энергии выбирается произвольно.

Тема 5.1. Динамика твердого тела.

1.5.1. Движение твердого тела.

В кинематике мы рассмотрели два основных вида движения твердого тела – поступательное и вращательное.

При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, поэтому достаточно определить, как движется одна точка, для того, чтобы полностью определить движение всего тела.

При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Для описания движения в данном случае нужно задать положение оси вращения в пространстве и угловую скорость тела в данный момент времени.

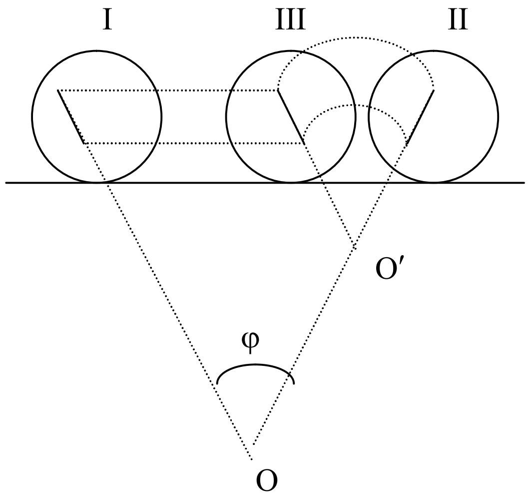

Рис.21

Опыт показывает, что любое движение твердого тела может быть представлено как наложение двух основных видов движения. Покажем это для случая плоского движения. Плоским называется такое движение твердого тела, при котором все точки тела движутся в параллельных плоскостях (например, качение цилиндра по плоскости).

Произвольное перемещение тела из состояния I в состояние II можно представить как сложение двух движений: поступательное перемещение из I в III и вращение из состояния III в II. Очевидно, что такое разбиение может быть осуществлено бесчисленным множеством способов, однако в любом случае поворот происходит на один и тот же угол φ.

Элементарное перемещение твердого тела при плоском движении всегда можно представить как поворот вокруг некоторой оси вращения, называемой мгновенной осью вращения (ось О на рис. 21.). Эта ось может лежат в пределах тела, либо вне его (например, в случае катящегося цилиндра, мгновенная ось совпадает с линией касания цилиндра с плоскостью).

Элементарное перемещение любой точки тела за время dt можно представить в виде $d\vec{S} = d\vec{S}_п + d\vec{S}_в$, где $d\vec{S}_п$ - одинаково для всех точек, а $d\vec{S}_в$ - различно для различных точек тела. Разделив это равенство на dt, получим: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$, где $\vec{v}_0$ - одинаковая для всех точек тела скорость поступательного движения, и $\vec{v}'$ - различная, для разных точек тела, скорость, обусловленная вращением.

2.5.1. Центр масс. Движение центра масс твердого тела.

Разбив твердое тело на элементарные массы m_i, его можно рассматривать как систему материальных точек, взаимное расположение которых не меняется при любых воздействиях на данное тело. Положение каждой элементарной массы определяется радиус-вектором $\vec{r}_i$. Назовем *центром масс (центром инерции)* точку С, положение которой определяется выражением

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_1} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{m}$$

или

$$m \cdot \vec{r}_C = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \qquad \text{(рис. 22).}$$

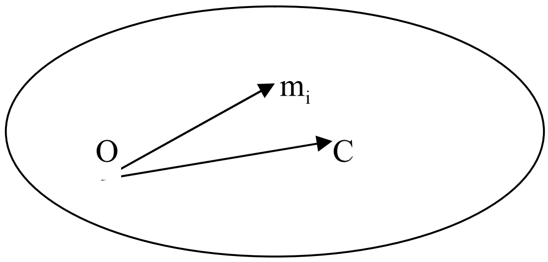

Рис. 22.

На каждую элементарную массу действуют как внутренние силы, обусловленные ее взаимодействием с другими элементарными массами, так и внешние силы (например, в поле тяготения Земли на каждую элементарную массу действует сила тяжести $m\vec{g}$).

Запишем для каждой элементарной массы второй закон Ньютона $m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_i \vec{f}_i + \vec{F}_i$, где $\sum_i \vec{f}_i$ - равнодействующая внутренних сил, $\vec{F}_i$ - равнодействующая внешних сил.

Суммируя уравнения для всех элементарных масс, получим:

$$\sum_i m_i \cdot \vec{a}_i = \sum \sum_i \vec{f}_i + \sum \vec{F}_i .$$

Но сумма внутренних сил равна нулю, т.е. $\sum \sum_i \vec{f}_i = 0$ и тогда

$$\sum m_i \cdot \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i .$$

Дважды дифференцируя равенство $m \cdot \vec{r}_C = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i$ можно получить, $\sum m_i \cdot \vec{a}_i = m \cdot \vec{a}_C$ и тогда получаем уравнение $m \cdot \vec{a}_C = \sum \vec{F}_I$.

Из этого уравнения следует, что *центр масс (инерции) твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу сил.*

3.5.1. Момент силы относительно точки и оси. Пара сил. Момент пары сил.

Необходимость введения момента силы очевидна из простых опытов с равновесием тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, под действием нескольких сил. Например, на вал с диском действуют две силы $\vec{F}$ и $\vec{f}$ (рис. 23). Опыт показывает, что равновесие имеет место только при условии, что $F \cdot R = f \cdot r$, т.е. когда моменты сил равны по величине и противоположны по направлению.

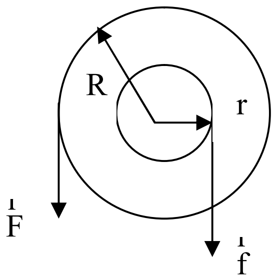

Рис.23.

Следовательно, при определении покоя или равновесия тела, свободно вращающегося вокруг неподвижной оси, нужно знать не силы, а моменты этих сил относительно оси вращения, которые играют ту же роль, что и силы при поступательном движении тела.

Запишем уравнение второго закона Ньютона для i – ой материальной точки $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$. Умножив это уравнение векторно слева на $\vec{r}_i$ получим:

$$\left[\vec{r}_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right] = \left[\vec{r}_i \vec{F}_i\right].$$

Рассмотрим правую часть полученного выражения, обозначив ее $\vec{M}$.

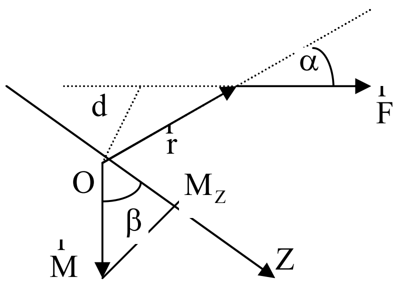

Рис. 24.

Псевдовектор $\vec{M} = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right]$ называется *моментом силы* $\vec{F}$ относительно точки О. Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости содержащей $\vec{r}$ и $\vec{F}$ (рис. 24), его направление определяется с помощью *правила правого винта.*

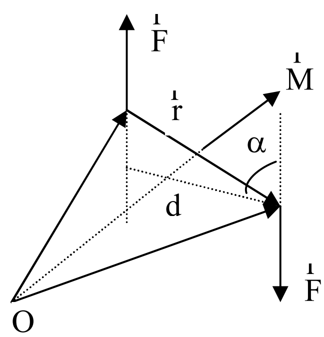

Рис. 25.

Модуль вектора $\vec{M}$ определяется по формуле $M = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot d$, где $d = r \cdot \sin\alpha$ - плечо силы, т.е. кратчайшее расстояние от точки О до линии действия силы. Проекция этого вектора M_Z на ось OZ, проходящую через точку О, называется моментом силы относительно этой оси, $M_Z = M \cdot \cos\beta$, где β - угол между направлением вектора $\vec{M}$ и осью OZ. Направление этой проекции и определяет направление вращения тела.

Тело, способное вращаться относительно неподвижной оси, находится в равновесии, если сумма моментов сил, приложенных к телу, относительно этой оси равна нулю, т.е. $\sum_i M_{Zi} = 0$.

Две равные по величине, направленные в разные стороны, но действующие вдоль одной прямой силы, называются <u>*парой сил*</u> (рис. 25.). Под действием пары сил тело перемещаться не может, но будет поворачиваться. Величина $\vec{M} = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right]$ называется моментом пары сил. Модуль момента пары силы определяется по формуле $M = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot d$, где $d = r \cdot \sin\alpha$ плечо пары сил.

<u>*4.5.1. Момент импульса материальной точки и твердого тела.*</u>

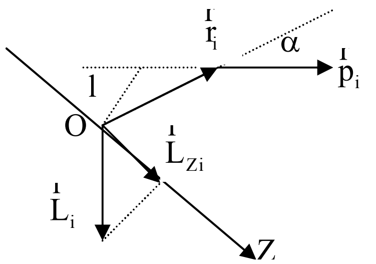

Рис. 26.

Рассмотрим левую часть выражения $\left[\vec{r}_i \dfrac{d\vec{p}_i}{dt}\right] = \left[\vec{r}_i \vec{F}_i\right]$. Для абсолютно твердого тела $\vec{r}_i$ от времени не зависит его можно внести под знак производной и тогда $\left[\vec{r}_i \dfrac{d\vec{p}_i}{dt}\right] = \dfrac{d}{dt}\left[\vec{r}_i \vec{p}_i\right]$. Величину $\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i \vec{p}_i\right]$ называют <u>*моментом импульса материальной точки относительно точки O*</u> (рис. 26). Величину $\vec{L}_{Zi} = \vec{L}_i \cdot \cos\beta$ называют моментом импульса точки относительно оси Z. Величину $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ называют <u>*моментом импульса твердого тела относительно точки O.*</u>

<u>*5.5.1. Момент инерции материальной точки и твердого тела. Теорема Штейнера.*</u>

Учитывая, что $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ и $\vec{v} = \left[\vec{\omega}\,\vec{r}\right]$ выражение $\vec{L} = \left[\vec{r}\,\vec{p}\right]$ можно преобразовать к виду $L = m \cdot r^2 \cdot \omega$.

Физическую величину $I = m_i \cdot r_i^2$ называют <u>*моментом инерции материальной точки*</u> относительно оси вращения, а величину $I = \sum_i m_i \cdot r_i^2$ <u>*моментом инерции твердого тела.*</u>

Любое твердое тело можно разбить на элементарные массы $dm = \rho \cdot dV$, расположенные на расстоянии r от оси вращения. Тогда момент инерции твер-

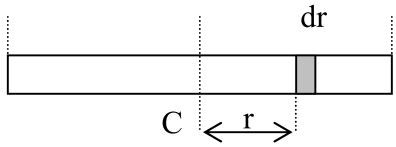

Рис. 27.

дого тела может быть определен по формуле $I = \int \rho \cdot r^2 \cdot dV$, где интегрирование должно быть распространено на весь объем тела. В качестве примера определим момент инерции тонкого стержня длиной l, относительно оси проходящей через центр масс C (рис. 27).

Выделим элемент стержня длиной dr расположенный на расстоянии r от оси вращения, тогда $dV = S \cdot dr$, где S - площадь поперечного сечения стержня. Подставляя в формулу $I = \int \rho \cdot r^2 \cdot dV$ получим $I = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho \cdot S \cdot r^2 \cdot dr = \frac{\rho \cdot S \cdot l^3}{12}$. Вводя массу стержня $m = \rho \cdot S \cdot l$ окончательно получим $I = \frac{1}{12} m \cdot l^2$.

Аналогично рассчитываются моменты инерции и других тел. Приведем без вывода моменты инерции тел правильной геометрической формы:

- тонкий диск радиусом R - $I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$;
- тонкий обруч радиусом R - $I = m \cdot R^2$;
- шар радиусом R - $I = \frac{2}{5} m \cdot R^2$.

Момент инерции тела зависит от положения оси вращения. Для определения момента инерции тела относительно оси, не проходящей через центр масс, можно пользоваться теоремой Гюйгенса – Штейнера $I = I_c + m \cdot d^2$, где I_c - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, I - момент инерции относительно новой оси, d - расстояние между осями, m - масса тела.

Для доказательства теоремы Штейнера определим момент инерции тонкого стержня, относительно оси проходящей через один из концов стержня. Для этого в предыдущем примере нам надо поменять пределы интегрирования:

$I = \int_0^l \rho \cdot S \cdot r^2 \cdot dr = \frac{\rho \cdot S \cdot l^3}{3}$ и после замены $\rho \cdot S \cdot l = m$ получим $I = \frac{1}{3} m \cdot l^2$.

Но к этому же результату можно придти и по теореме Штейнера

$$I = \frac{1}{12} m \cdot l^2 + m \cdot \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} m \cdot l^2.$$

6.5.1. Основное уравнение динамики вращательного движения.

С учетом введенных величин второй закон Ньютона для вращающегося тела можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Так как $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I \cdot \omega) = I \cdot \frac{d\omega}{dt} = I \cdot \varepsilon$, то можно найти и другую форму записи,

$$I \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}.$$

Это выражение получило название основного уравнения динамики вращательного движения.

Сравнивая выражения второго закона Ньютона для поступательного $m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=\sum\vec{F}$ и вращательного движения $I\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{M}$ можно установить физический смысл момента инерции. *Момент инерции во вращательном движении играет ту же роль, что и масса в поступательном движении, т.е. является мерой инертности тела во вращательном движении.*

Математическая и физическая аналогия усматриваются в ряде механических величин, законов и формул динамики поступательного и вращательного движений (см. таблицу.).

Поступательное движение	Вращательное движение
Масса m	Момент инерции I
Ускорение $\vec{a}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$
Сила $\vec{F}$	Момент силы $\vec{M}$
Импульс $\vec{p}=m\vec{v}$	Момент импульса $L=I\cdot\omega$
Второй закон Ньютона $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$	Второй закон Ньютона $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$
Работа $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$	Работа $A=M\cdot\varphi$
Мощность $N=F\cdot v$	Мощность $N=M\cdot\omega$

7.5.1. Работа и мощность во вращательном движении. Кинетическая энергия вращающегося тела.

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Будем рассматривать его как систему материальных точек массой m_i расположенных на расстоянии r_i от оси вращения. При вращении тела отдельные точки тела описывают окружности радиуса r_i и будут иметь различные линейные скорости, но угловая скорость всех точек будет одинакова.

Кинетическую энергию вращающегося тела можно найти как сумму кинетической энергии отдельных точек $T=\sum_i\frac{m_i\cdot v_i^2}{2}=\sum_i\frac{m_i\cdot r_i^2\cdot\omega^2}{2}=\frac{I\cdot\omega^2}{2}$. Мы получили выражение аналогичное кинетической энергии поступательного движения $T=\frac{m\cdot v^2}{2}$.

Пусть на твердое тело в точке B, расположенной на расстоянии r от оси вращения, действует сила $\vec{F}$. При повороте тела на малый угол $d\varphi$ точка приложения силы совершает перемещение $dS=r\cdot d\varphi$ и при этом будет совершена работа $dA = F \cdot dS \cdot \cos(90° - \alpha) = F \cdot r \cdot \sin\alpha \cdot d\varphi$. Но $F \cdot r \cdot \sin\alpha = M$ и тогда $dA = M \cdot d\varphi$. Полученная формула аналогична формуле $dA = F \cdot dS$.

6.1. Законы сохранения в механике.

Тела, образующие механическую систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими к данной системе. В соответствии с этим силы, действующие на тела системы можно разделить на внутренние и внешние. Внутренними будем называть силы, с которыми на данное тело действуют остальные тела системы, внешними – силы, обусловленные действием тел, не входящих в данную систему. Система тел называется замкнутой, если внешние силы отсутствую или их равнодействующая равна нулю.

Для замкнутых систем оказываются неизменными (сохраняются) три физических величины: импульс, момент импульса, энергия. Поэтому в механике мы рассматриваем три закона сохранения – закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса, закон сохранения энергии.

В основе закона сохранения энергии лежит однородность времени, т.е. равнозначность всех моментов времени. Ее следует понимать в том смысле, что замена момента времени t_1 моментом времени t_2 без изменения значений координат и скоростей частиц не изменяет механических свойств системы.

Закон сохранения импульса основывается на однородности пространства, т.е. одинаковости свойств пространства во всех точках. Ее следует понимать в том смысле, что параллельный перенос системы из одной точки пространства в другую без изменения координат и скоростей частиц не изменяет свойств механической системы.

Изотропия пространства, т.е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям лежит в основе закона сохранения момента импульса. Другими слова поворот замкнутой системы как целого не изменяет ее механических свойств.

1.6.1. Закон сохранения импульса.

Рассмотрим систему, состоящую из N взаимодействующих частиц. Запишем уравнение второго закона Ньютона для каждой частицы в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots\ldots\ldots + \vec{f}_{1N} + \vec{F}_1 \\
\frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \ldots\ldots\ldots + \vec{f}_{2N} + \vec{F}_2 \qquad , \\
\frac{d\vec{p}_N}{dt} &= \vec{f}_{N1} + \vec{f}_{N2} + \ldots\ldots\ldots + \vec{f}_{N(N-1)} + \vec{F}_N
\end{aligned}$$

Суммируя эти выражения и учитывая, что по третьему закону Ньютона $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$, получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_N\right) = \sum \vec{F}_i .$$

Величину $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_N$ называют импульсом системы тел (частиц) и тогда $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_i$. Для замкнутой системы тел равнодействующая всех внешних сил равна нулю, т.е. $\sum \vec{F}_i = 0$ и тогда $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, а это означает, что $\vec{p} = \mathrm{const}$. <u>*Это утверждение составляет содержание закона сохранения импульса – импульс замкнутой системы остается величиной постоянной.*</u>

Следует иметь ввиду, что закон сохранения импульса справедлив и для незамкнутой системы. Но в этом случае сохраняется проекция импульса на некоторое направление, при условии, что сумма проекций внешних сил на это направление равна нулю.

Закон сохранения импульса лежит в основе реактивного движения. Рассмотрим движение тела, масса которого изменяется. Пусть начальная масса ракеты равна M и она ежесекундно выбрасывает массу газов равную μ со скоростью c. Тогда масса ракеты с течением времени будет изменяться по закону $-\frac{dM}{dt} = \mu$, где знак минус указывает на то, что масса ракеты уменьшается.

Применим к ракете закон сохранения импульса. Пусть в начальный момент времени масса ракеты M, ее скорость v. Через некоторое время dt масса ракеты будет $(M - \mu \cdot dt)$, а скорость $(v + dv)$. Масса выброшенных газов $\mu \cdot dt$ и их скорость $(\vec{c} + \vec{v})$. Тогда по закону сохранения импульса

$$M \cdot \vec{v} = (M - \mu \cdot dt)(\vec{v} + d\vec{v}) + \mu \cdot dt \cdot (\vec{c} + \vec{v}).$$

После преобразований можно получить $M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu \cdot \vec{c}$. По форме это уравнение напоминает второй закон Ньютона и поэтому величину равную $\mu \cdot \vec{c}$ называют <u>*реактивной силой*</u>.

<u>*2.6.1. Закон сохранения момента импульса.*</u>

Ранее мы показали, что основное уравнение динамики вращательного движения $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ справедливо как для материальной точки, так и для системы материальных точек (и тел). Для замкнутой системы $\vec{M} = 0$ и тогда $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, а это означает, что $\vec{L} = \mathrm{const}$. <u>*Это утверждение выражает закон сохранения момента импульса – момент импульса замкнутой системы остается величиной постоянной.*</u>

Опыт показывает, что если тело привести во вращение вокруг некоторой оси и предоставить самому себе, то положение оси вращения в пространстве изменяется. Но существуют и оси, положение которых остается неизменным. Такие оси вращения получили название свободных осей вращения. Можно показать, что в любом теле существуют три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс, которые являются свободными осями.

Для устойчивости вращения большое значение имеет, какая именно из свободных осей служит осью вращения. Вращение около осей с наибольшим и наименьшим моментом инерции является устойчивым, а вращение вокруг оси с промежуточным значением – неустойчиво.

Свойство свободных осей сохранять свое положение в пространстве широко используется в технике. Наиболее интересны в этом плане – гироскопы.

Гироскопом называется массивное однородное тело, вращающееся с большой угловой скоростью около свободной оси вращения, совпадающей с осью симметрии гироскопа.

Для свободно вращающегося гироскопа сила тяжести не может изменить ориентацию оси, т.к. она приложена к центре масс, а момент сил трения достаточно мал и им можно пренебречь. Поэтому, если момент внешних сил равен нулю, то по закону сохранения момента импульса $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ и значит $\vec{L} = \mathrm{const}$, т.е. момент импульса гироскопа сохраняет свое направление в пространстве, а, следовательно, и ось вращения не изменяет своего положения в пространстве.

Для того, что ось вращения гироскопа изменила свое положение в пространстве необходимо, чтобы момент внешних сил, действующих на гироскоп, был отличен от нуля.

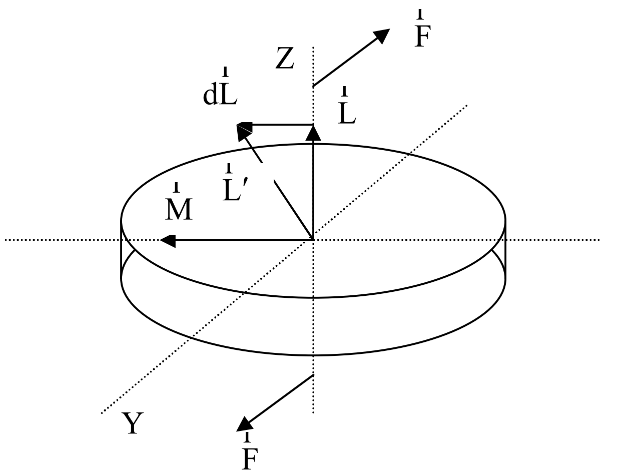

Рис. 28

При попытках изменить положение оси вращения гироскопа в пространстве возникает так называемый гироскопический эффект. Он состоит в том, что под действием пары сил $\vec{F}$ (рис. 28.) ось гироскопа поворачивается вокруг оси Y, а не вокруг оси X как это казалось бы естественным на первый взгляд.

Это явление может быть объяснено следующим образом. За время dt момент импульса гироскопа получает приращение $d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$, направленное, так же как и $\vec{M}$ (рис. 28). Следовательно, новое направление момента импульса $\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}$, а новое положение оси вращения будет совпадать с направлением $\vec{L}'$ и, значит, что ось вращения гироскопа будет поворачиваться относительно оси Y.

Если мы наблюдаем поворот оси гироскопа, то это означает, что на него действую силы. Эти силы получили название гироскопических сил. При закрепленных осях эти силы приложены к подшипникам.

Гироскопы нашли широкое применение в технике (гирокомпас, авиагоризонт, автопилот и т.д.). Гироскопические силы надо учитывать при проектировании двигателей самолетов, кораблей.

3.6.1. Закон сохранения энергии.

Рассмотрим систему, состоящую из N частиц с массами $m_1, m_2, m_3......m_N$, движущимися со скоростями $v_1, v_2, v_3, ... v_N$. Пусть на каждую частицу кроме внутренних сил $\vec{f}_{ik}$ действуют консервативная внешняя сила $\vec{F}_i$ и внешняя неконсервативная сила $\vec{F}_i^*$. Запишем второй закон Ньютона для $i-$ой частицы в виде

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum \vec{f}_{ik} + \vec{F}_i + \vec{F}_i^* .$$

Умножив это уравнение на $\vec{v} \cdot dt = d\vec{S}$ получим:

$$m_i \cdot \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i = \sum \vec{f}_{ik} \cdot d\vec{S} + \vec{F}_i \cdot d\vec{S}_i + \vec{F}_i^* \cdot d\vec{S} .$$

Сложив все N уравнений, будем иметь

$$\sum m_i \cdot v_i \cdot dv = \sum \left(\sum \vec{f}_{ik} \cdot d\vec{S} \right) + \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{S} + \sum \vec{F}_i^* \cdot d\vec{S} .$$

Левая часть этого уравнения представляет собой приращение кинетической энергии системы, т.е. $\sum m_i \cdot v_i \cdot dv_i = dT$.

Ранее мы показали, что работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии, т.е. $\sum \left(\sum \vec{f}_{ik} \cdot d\vec{S} \right) = -dU_в$ а $\sum \vec{F}_i \cdot d\vec{S} = -dU$. Обозначив $\sum \vec{F}_i^* \cdot d\vec{S} = dA_{вн}$ окончательно получим:

$$dT = -dU_в - dU + dA_{вн} .$$

Это выражение можно преобразовать к виду

$$d\left(T + U_в + U\right) = dA_{вн} ,$$

Величину $E = T + U_в + U$ будем называть полной механической энергией системы и тогда $dE = dA_{вн}$, т.е. *<u>полная механическая энергия системы изменяется на величину работы внешней силы.</u>* Из данного уравнения следует невозможность создания вечного двигателя первого рода, т.е. двигателя который совершал бы работы больше, чем затрачено энергии.

Для замкнутой системы работа внешних сил равна нулю, и поэтому $dE = 0$, а это означает, что $E = const$. *<u>Это утверждение выражает закон сохранения энергии - полная механическая энергия замкнутой системы остается величиной постоянной.</u>*

Рассмотрим материальную точку, имеющую только одну степень свободы, например шарик, прикрепленный к концу пружины и скользящий без трения по горизонтальной направляющей (рис. 29а). Зависимость потенциальной энергии шарика от координаты показана на графике (рис. 29б).

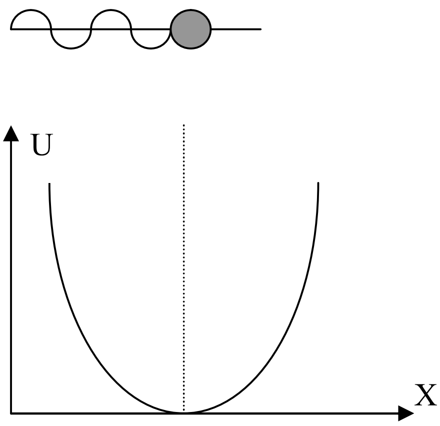

Рис. 29

Поскольку сила, действующая на шарик со стороны направляющей, перпендикулярна скорости шарика (трения нет), то она работы не совершает. Система является замкнутой и имеет место закон сохранения энергии $T + U = \text{const}$.

Отсюда следует, что кинетическая энергия тела может возрастать только за счет потенциальной энергии и наоборот. Поэтому, если система находится в таком состоянии, что ее скорость равна нулю, а потенциальная энергия имеет минимальное значение, то без внешнего воздействия она не сможет выйти из этого положения, т.е. придти в движение, и будет находиться в равновесии. Условие минимума потенциальной энергии имеет вид $\frac{dU}{dx} = 0$. Минимуму U на графике соответствует точка $x = x_0$ (где x_0- длина недеформированной пружины). Ранее мы показали, что $\frac{dU}{dx} = -F_x$, а это значит, что в положении равновесия равнодействующая сил, приложенных к телу равна нулю.

Таким образом, положение, соответствующее минимуму потенциальной энергии, обладает тем свойством, что сила, действующая на тело, равна нулю. Если при малом отклонении системы от положения равновесия возникают силы, стремящиеся вернуть тело в положение равновесия, то равновесие называется устойчивым, в противном случае – неустойчивым.

Итак, зная вид функции, которой выражается потенциальная энергия системы, можно сделать ряд заключений о характере ее движения.

7.1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости.

Колебания широко распространены в природе и технике. Колебательные процессы лежат в основе целых отраслей техники (например, электротехника, радиотехника и т.д.). Во многих случаях колебания играют негативную роль (колебания крыльев самолета, конструкции автомобиля и т.д.), что необходимо учитывать при их изготовлении.

В зависимости от физической природы процесса различают: *механические и электромагнитные колебания.*

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают *свободные (собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.*

Свободными или собственными колебаниями называются колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как система была выведена из положения равновесия.

Вынужденные колебания происходят под действием внешней периодически изменяющейся силы.

Автоколебания, как вынужденные колебания, сопровождаются внешним воздействием на систему, но моменты этого воздействия задаются самой системой, т.е. система сама управляет внешним воздействием.

При параметрических колебаниях за счет внешнего воздействия происходит изменение какого-либо параметра системы (например, длины нити математического маятника).

Простейшими являются гармонические колебания, т.е. колебания при которых некоторая физическая величина изменяется по закону синуса или косинуса. Этот вид колебаний важен по двум причинам:

- колебания в природе и технике часто имеют характер близкий к гармоническому;
- периодические процессы иной формы могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

1.7.1. Малые колебания.

Рассмотрим механическую систему, положение которой может быть задано с помощью одной величины, которую мы обозначим за «x».

В этом случае потенциальная энергия системы будет функцией одной переменной «x», т.е. $U = U(x)$. Допустим, что система обладает положением устойчивого равновесия. В этом положении потенциальная энергия имеет минимальное значение. Условимся координату x и потенциальную энергию U отсчитывать от положения равновесия, тогда $U(0) = 0$.

Разложим функцию $U(x)$ в ряд по степеням x, причем ограничимся рассмотрением малых колебаний, так что высшими степенями x можно пренебречь.

$$U(x) = U(0) + U'(0)\cdot x + \frac{1}{2}U''(0)\cdot x^2.$$

Так как $U(0) = 0$ и $U'(0) = 0$,

то введя обозначение $U''(0) = k$ получим,

$$U(x) = \frac{k\cdot x^2}{2},$$

коэффициент k называется жесткостью и является характеристикой колеблющейся системы в целом.

Найдем силу, действующую на систему $F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx$.

Силы вида $F = -kx$, независимо от их природы, получили название <u>*квазиупругих сил.*</u> Они всегда направлены к положению равновесия и пропорциональны смещению системы от положения равновесия.

Система, движущаяся под действием квазиупругой силы, называется <u>*одномерным гармоническим осциллятором.*</u> Согласно второму закону Ньютона, в одномерном случае, получим $m \cdot \vec{a}_x = \vec{F}_x$. В случае гармонического осциллятора $\vec{a}_x = x'', \vec{F}_x = -kx$ и тогда $m \cdot x'' = -kx$. Если ввести обозначение $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, то последнее выражение можно преобразовать к виду $x'' + \omega_0^2 \cdot x = 0$. Это уравнение описывает движение одномерного гармонического осциллятора. Величина ω_0 называется <u>*собственной частотой колебаний*</u> системы.

Рассмотрим некоторые примеры.

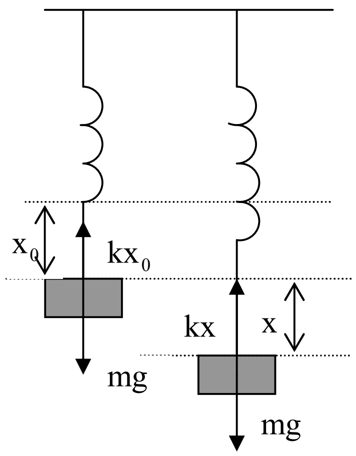

Рис. 30.

а) Пусть груз массой m подвешен к пружине с жесткостью k. В положении равновесия сила тяжести mg уравновешена силой упругости пружины kx_0, т.е. $mg = kx_0$. Направим ось x вниз, а начало отсчета совместим с положением равновесия системы. Тогда при смещении груза в положение, координата которого будет равна x, на него будут действовать две силы – сила тяжести mg и сила упругости пружины $k(x + x_0)$. Равнодействующая этих сил $F = mg - k(x + x_0) = -kx$.

Это означает, что равнодействующая силы тяжести и силы упругости пружины является квазиупругой силой и колебания груза, подвешенного к пружине, будут описываться уравнением вида $x'' + \omega_0^2 \cdot x = 0$.

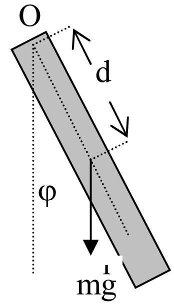

Рис. 31

б) Рассмотрим твердое тело способное совершать колебания относительно оси, не совпадающей с центром масс, так называемый <u>*физический маятник*</u> (рис. 31). Из основного уравнения динамики вращательного движения $I \cdot \varepsilon = M$ где $M = -mgd\sin\varphi$ для малых колебаний можно получить $I \cdot \varphi'' + mgd \cdot \varphi = 0$. Вводя обозначение $\omega_0^2 = \frac{mgd}{I}$, получим уравнение $\varphi'' + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0$, которое аналогично полученному ранее.

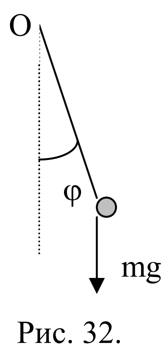

Рис. 32.

в) <u>*Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на нерастяжимой нити*</u>. Реальный маятник, у которого масса тела во много раз больше массы нити, а размеры тела во много раз меньше длины нити, можно считать математическим (рис.32). Учитывая, что момент силы тяжести

$M = -mgl\sin\varphi$ и момент инерции точки $I = m \cdot l^2$ из динамического уравнения вращательного движения $I \cdot \varepsilon = M$ можно получить $\varphi'' + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0$,

где $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$.

Итак, мы приходим к выводу о том, что во всех случаях колебания описываются одним и тем же уравнением вида $x'' + \omega_0^2 \cdot x = 0$ совпадающим с уравнением движения классического гармонического осциллятора.

2.7.1. Гармонические колебания.

Рассмотрим колебания описываемые уравнением $x'' + \omega_0^2 \cdot x = 0$. Общее решение этого однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами ищется в виде

$$x = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где x_0 и φ_0 - произвольные постоянные, обусловленные начальными условиями.

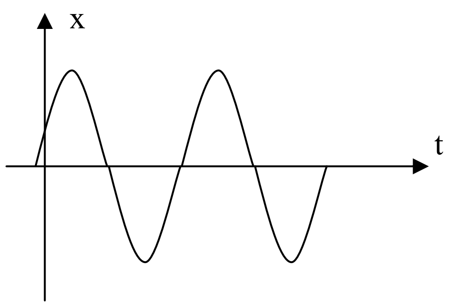

Рис. 33

В том, что это соотношение удовлетворяет дифференциальному уравнению легко убедиться, подставив в него предполагаемую функцию и ее вторую производную по t, $x'' = -x_0 \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 \cdot x$. График гармонического колебания представлен на рисунке 33.

Величина наибольшего отклонения системы от положения равновесия x_0 называется *амплитудой колебания*. Величина $(\omega_0 t + \varphi_0)$ называется *фазой колебания*, а φ_0 - *начальная фаза*. С изменением начала отсчета времени будет изменяться и начальная фаза. Периодом колебания называется промежуток времени в течение которого фаза колебания изменяется на 2π, т.е. система совершает одно полное колебание, $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. Тогда для:

пружинного маятника - $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$,

физического маятника - $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgd}}$,

математического маятника - $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Дифференцируя уравнение $x = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ по времени можно найти выражения для скорости и ускорения тела при гармоническом колебании:

$$v = \frac{dx}{dt} = -v_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$$
$$a = \frac{dv}{dt} = -a_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$$
.

Квазиупругая сила является консервативной силой и поэтому полная механическая энергии колеблющейся системы остается величиной постоянной. Так как $T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m \cdot x_0^2 \cdot \omega_0^2}{2} \sin^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$ и $U = \frac{kx^2}{2} = \frac{m \cdot x_0^2 \cdot \omega_0^2}{2} \cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$, то $E = T + U = \frac{m \cdot x_0^2 \cdot \omega_0^2}{2}$.

Выясним теперь, как изменяется кинетическая и потенциальная энергия системы. Так как $\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = \left[1 - \cos 2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)\right]$ и $\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = \left[1 + \cos 2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)\right]$ получим:

$$T = E \cdot \left(1 - \cos 2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)\right)$$
$$U = E \cdot \left(1 + \cos 2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)\right),$$

т.е. кинетическая и потенциальная энергия изменяются с удвоенной частотой.

3.7.1. Затухающие колебания.

Во всякой реальной системе имеются силы сопротивления, действие которых приводит к уменьшению энергии системы, т.е. затуханию колебаний.

Наиболее часто встречается случай, когда сила сопротивления пропорциональна скорости, т.е. $F = -r \cdot v$. Уравнение второго закона Ньютона в этом случае будет иметь вид $m \cdot x'' + r \cdot x' + k \cdot x = 0$. Введем обозначения $\beta = \frac{r}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ и тогда это уравнение примет вид:

$$x'' + 2\beta \cdot x' + \omega_0^2 \cdot x = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения в случае малого затухания $\left(\beta << \omega_0\right)$ можно представить в виде:

$$x = x_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_0\right), \text{ где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

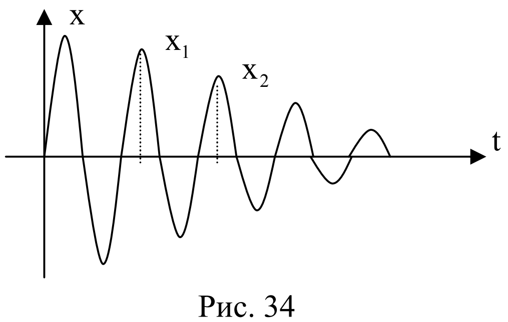

Рис. 34

Гармонический множитель $\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$ в этом выражении ответственен за колебание, а множитель $x_0 \cdot e^{-\beta \cdot t}$ представляет собой амплитуду колебания. Следовательно, это решение можно рассматривать как гармоническое колебание, амплитуда которого с течением времени изменяется по экспоненциальному закону (рис. 34). Затухающее колебание происходит с частотой ω меньшей, чем частота собственных колебаний ω_0.

Величина $\beta = \dfrac{r}{2m}$ называется *коэффициентом затухания*. Определим время τ в течение которого амплитуда колебания уменьшается в «е» раз. Если в момент времени t амплитуда колебания $x_1 = x_0 \cdot e^{-\beta \cdot t}$, а в момент времени $t + \tau$ - $x_n = x_0 \cdot e^{-\beta(t+\tau)}$, то $\dfrac{x_1}{x_n} = \dfrac{x_0 \cdot e^{-\beta \cdot t}}{x_0 \cdot e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta \cdot \tau}$.

По условию $\dfrac{x_1}{x_n} = e$, следовательно, $\beta \cdot \tau = 1$, и $\beta = \dfrac{1}{\tau}$. Коэффициент затухания численно равен обратному значению промежутка времени τ, в течение которого амплитуда колебания уменьшается в «е» раз.

Затухание колебаний принято характеризовать так называемым *логарифмическим декрементом затухания – натуральным логарифмом отношения двух амплитуд колебания, отстоящих друг от друга на время равное периоду T* (см. рис. 34).

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_0 \cdot e^{-\beta \cdot t}}{x_0 \cdot e^{-\beta(t+T)}} = \beta \cdot T.$$

Обозначим логарифмический декремент затухания буквой λ, т.е. $\lambda = \beta \cdot T$. Так как $\beta = \dfrac{1}{\tau}$ то, для декремента затухания получим $\lambda = \dfrac{T}{\tau}$. Величина $\dfrac{\tau}{T} = N_e$ - число колебаний, которое должна совершить система, чтобы амплитуда колебания уменьшилась в «е» раз. Следовательно, логарифмический декремент затухания λ численно равен величине обратной числу колебаний, в течение которых амплитуда колебания уменьшается в «е» раз, $\lambda = \dfrac{1}{N_e}$.

Для характеристики колебательной системы часто используют также величину $Q = \dfrac{\pi}{\lambda}$ называемую *добротностью системы*.

Ранее мы показали, что энергия колеблющейся системы пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому в случае затухающих колебаний энергия системы будет изменяться по закону

$$E = E_0 \cdot e^{-\beta \cdot t}.$$

Дифференцируя это уравнение по времени t, найдем, что приращение энергии

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta \cdot E_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} = -2\beta \cdot E.$$

Если затухание мало, то убыль энергии системы за один период $\Delta E = -2\beta \cdot T \cdot E$. Отсюда $\dfrac{E}{|-\Delta E|} = \dfrac{1}{2\beta \cdot T}$, но $\beta \cdot T = \lambda$ и тогда $\dfrac{E}{|-\Delta E|} = \dfrac{Q}{2\pi}$. Из этого выражения следует, что при слабом затухании колебаний, добротность с точностью до множителя 2π равна отношению энергии, запасенной системой в данный момент времени, к убыли этой энергии в течение одного полного колебания.

4.7.1. Вынужденные колебания.

Рассмотрим систему, на которую действует внешняя периодическая сила, изменяющаяся по закону $F = F_0 \cos \omega t$. Дифференциальное уравнение, описывающее колебания такой системы будет иметь вид:

$$x'' + 2\beta \cdot x' + \omega_0^2 \cdot x = f \cdot \cos \omega t,$$

где $f = \dfrac{F_0}{m}$.

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения надо искать в виде суммы двух слагаемых:

$$x = x_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_1 t + \alpha),$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$,

$$x_0 = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2 \cdot \omega^2}} \cos(\omega t + \alpha), \text{ а } \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{2\beta \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Первое слагаемое играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при так называемом установлении колебаний. С течением времени роль этого слагаемого уменьшается ввиду наличия множителя $e^{-\beta t}$ и по прошествии достачного времени им можно пренебречь.

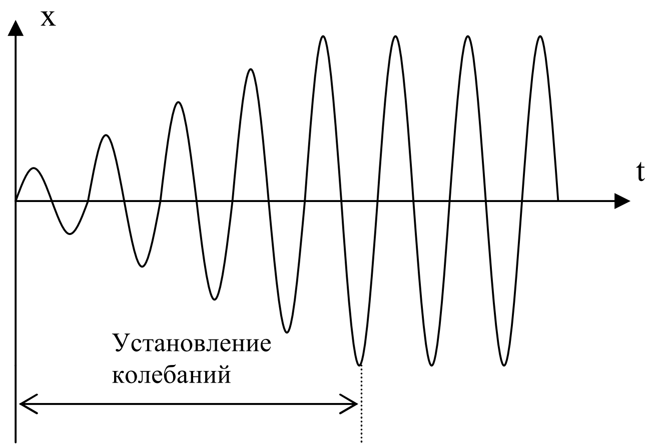

Рис. 35

Следовательно, второе решение описывает установившиеся вынужденные колебания. Они представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы (рис. 35). Амплитуда вынужденных колебаний зависит от амплитуды вынуждающей силы и ее частоты. Зависимость амплитуды колебаний от частоты приводит к тому, что при некоторой частоте амплитуда вынужденного колебания достигает максимального значения. Это явление получило название резонанса, а соответствующая частота – резонансной частоты (рис. 36).

Дифференцируя выражение $\dfrac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+2\beta^2\cdot\omega^2}}$ по частоте и приравнивая производную нулю можно найти резонансную частоту.

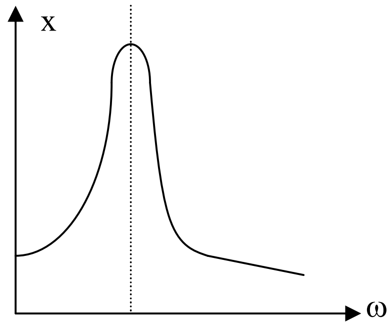

Рис. 36

$$-2\cdot\omega\cdot\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+8\beta^2\cdot\omega=0,$$ отсюда $\omega_1=0,\quad \omega_{2,3}=\pm\sqrt{\omega_0^2-4\beta^2}$.

Физический смысл имеет только положительная частота и поэтому, для резонансной частоты получаем выражение $\omega_p=\sqrt{\omega_0^2-4\beta^2}$. В случае малого затухания $(\beta << \omega_0)$ можно считать, что $\omega_p\approx\omega_0$.

При уменьшении частоты вынуждающей силы амплитуда колебаний уменьшается. Найдем отклонение системы от положения равновесия при $\omega=0$, $x_0'=\dfrac{F}{m\cdot\omega_0^2}$, а при резонансе $x_p=\dfrac{F}{m\cdot 2\beta\cdot\omega_0}$.

Тогда $\dfrac{x_p}{x_0'}=\dfrac{\omega_0}{2\beta}$.

Учитывая, что $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$

окончательно получим:

$$\frac{x_p}{x_0'}=\frac{\pi}{\lambda}=Q.$$

Добротность системы показывает во сколько раз увеличивается амплитуда колебания при резонансе по сравнению с отклонением системы от положения равновесия под действием постоянной силы.

5.7.1. Векторная диаграмма.

Решение ряда задач значительно облегчается и становится наглядным при использовании метода векторных диаграмм.

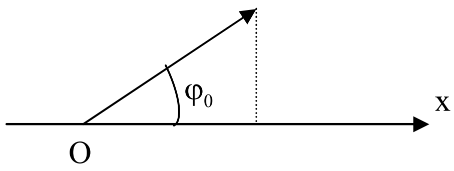

Рис. 37.

В основе метода лежит понятие вращающегося вектора. Возьмем ось «x» и из точки О отложим вектор длины x_0 под углом φ_0 к оси «x» (рис. 37). Если привести вектор во вращение с угловой скоростью ω_0, то проекция конца этого вектора на ось «x» будет перемещаться по оси «x» в пределах от $+x_0$ до $-x_0$, при этом координата будет изменяться по закону $x=x_0\cdot\cos\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)$. Следовательно, проекция конца вектора на ось будет совершать гармоническое колебание с амплитудой равной длине вектора x_0, и частотой равной угловой скорости вращения ω_0.

Из сказанного следует, что гармоническое колебание может быть представлено с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью «x» угол, равный начальной фазе колебания φ_0. Отсчет угла – фазы колебания ведется от оси «x» в направлении против часовой стрелки.

6.7.1 . Сложение колебаний происходящих вдоль одной прямой.

Пусть точка совершает два колебания, происходящих вдоль одной прямой с одинаковой частотой, описываемых уравнениями:

$$x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2).$$

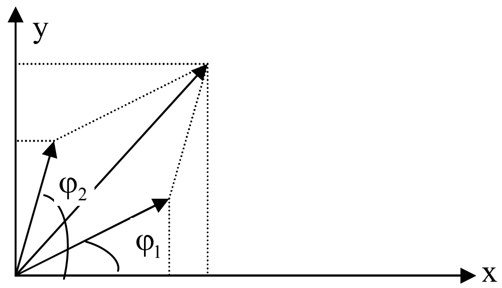

Рис. 38.

Представив оба колебания в виде векторов и сложив их по правилу сложения векторов можно получить результирующее колебание. Результирующему колебанию соответствует вектор, проекция которого на ось «x» равна сумме проекций исходных колебаний, т.е. $x = x_1 + x_2$ (рис. 38).

Запишем результирующее колебание в виде $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$.

Из рисунка

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

и $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$.

Особый интерес представляют частные случаи:

1) $\varphi_1 = \varphi_2$, $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$, $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 = (A_1 + A_2)^2$ т.е. $A = A_1 + A_2$;

2) $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$, $\cos(\pi) = -1$, $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 \cdot A_2 = (A_1 - A_2)^2$ т.е. $A = A_1 - A_2$;

3) $\varphi_2 = \varphi_1 + \dfrac{\pi}{2}$ $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, $A^2 = A_1^2 + A_2^2$.

Особый интерес представляет случай, когда частоты двух складываемых колебаний не совпадают друг с другом, но мало отличаются друг от друга. Пусть $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega << \omega$. Тогда слагаемые колебания могут быть представлены в виде:

$$x_1 = A \cdot \cos\omega t$$
$$x_2 = A \cdot \cos(\omega + \Delta\omega)t,$$

а их сумма

$$x = A\left[\cos\omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t\right] = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \cdot \cos\omega t = x'\cos\omega t.$$

Множитель $x' = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$ изменяется гораздо медленнее, чем второй множитель. Ввиду условия $\Delta\omega << \omega$ за время, в течение которого множитель $\cos\omega t$ совершает несколько полных колебаний, x' почти не изменяется. Это дает нам право рассматривать результирующее колебание как гармоническое колебание частоты ω, амплитуда которого, медленно изменяется по некоторому закону. Такие колебания получили название <u>*пульсаций*</u> (рис. 39).

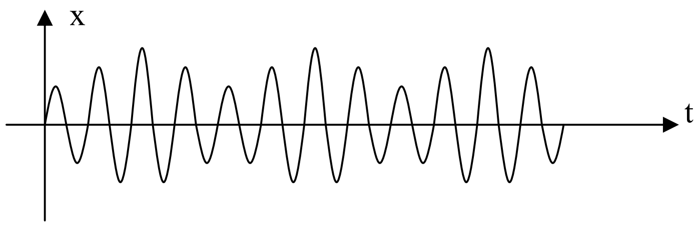

Рис. 39.

<u>*7.7.1. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.*</u>

Допустим, что материальная точка может совершать колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Если возбудить оба этих колебания, то точка будет двигаться по некоторой траектории, вид которой зависит от разности фаз складываемых колебаний. Пусть колебания заданы уравнениями

$$x = a \cdot \cos\omega t$$

$$y = b \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

которые являются координатами движущейся точки, заданными в параметрической форме. Исключив из этих уравнений параметр t получим уравнение траектории точки. Сделаем некоторые математические преобразования

$$\cos\omega t = \frac{x}{a}, \quad \sin\omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad \cos(\omega t + \varphi) = \frac{y}{b}.$$

Преобразуем $\cos(\omega t + \varphi) = \cos\omega t \cdot \sin\varphi + \cos\varphi \cdot \sin\omega t$ и тогда

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\varphi + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\sin\varphi$$

избавляясь от иррациональности окончательно можно получить:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{a \cdot b}\cos\varphi + \frac{x^2}{a^2} = \sin\varphi.$$

Это уравнение представляет собой общее уравнение траектории материальной точки, совершающей два взаимно перпендикулярных колебания.

Рассмотрим частные случаи.

1) $\varphi = 0, \pi$, $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = \pm 1$, тогда $\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0$, $y = \pm\frac{b}{a}x$;

в этом случае траектория – отрезок прямой, проходящей через начало координат (рис. 40а).

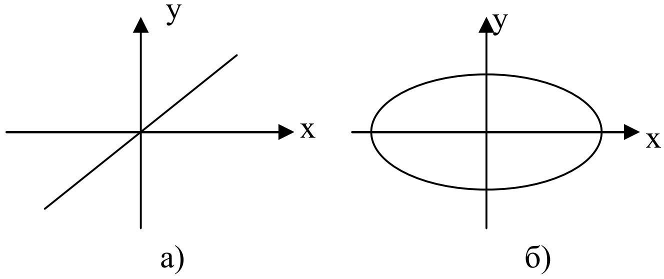

Рис.40

2) $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, $\sin\varphi = 1, \cos\varphi = 0$ и тогда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
в этом случае траекторией материальной точки является эллипс, вытянутость и ориентация которого на плоскости зависят от a и b (рис. 40б). При $a = b$ эллипс превращается в окружность.

3) Если частоты колебаний не совпадают, то траектория имеет вид довольно сложных кривых, называемых фигурами Лиссажу. Например, при

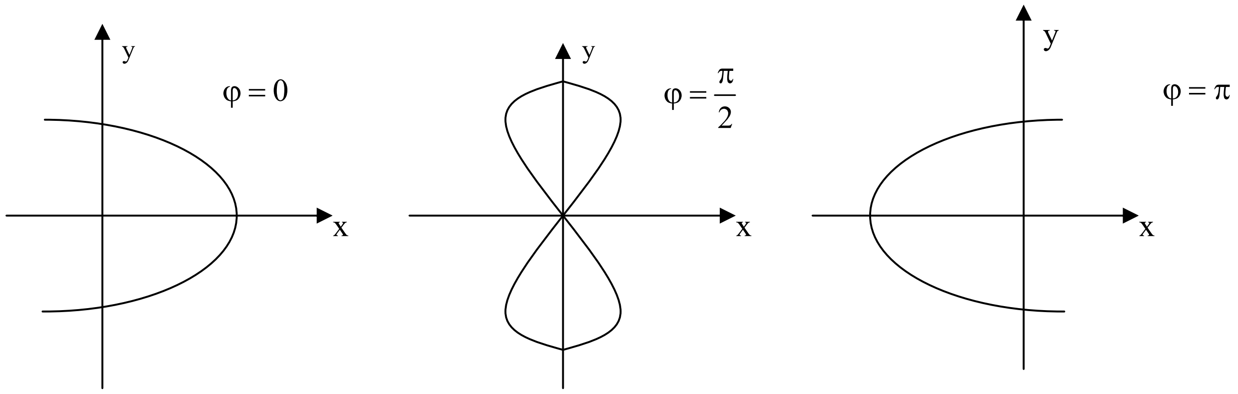

Рис. 41

$\omega_1 = 2\omega_2$, траектории будут иметь вид на рисунке 41.

Тема 8.1. Механические волны. Элементы акустики.

1.8.1. Волны. Поперечные и продольные волны.

Колебания, возбуждаемые в одной точке сплошной среды распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды.

При этом вся среда приходит в специфическое состояние, когда все ее частицы колеблются около своих положений равновесия, передавая друг другу импульс и энергию. Это возможно благодаря упругому взаимодействию всех частиц. Такое движение есть колебание связанных микросистем.

Процесс распространения колебаний в упругой среде, периодичный во времени и пространстве называется волновым процессом или просто волной. При распространении волны частицы среды не движутся вместе в волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице передается лишь состояние колебательного движения и энергия. Поэтому мы можем указать основное свойство волны – перенос энергии без переноса массы вещества.

Колебания частиц происходит с разностью фаз, зависящей от расстояния между ними.

<u>Если направление колебания отдельных частиц среды происходит в направлении перпендикулярном направлению распространения волны, то волна называется поперечной.</u> Поперечные волны могут распространяться только в твердых телах и на поверхности жидкости.

<u>В продольной волне направление колебания частиц среды совпадает с направлением распространения волны.</u> Такие волны могут распространяться в любой среде.

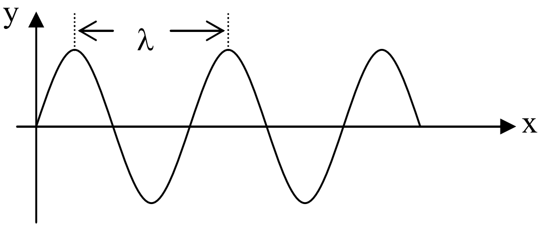

Рис. 42.

<u>Волна называется гармонической, если соответствующее ей колебание является гармоническим.</u> Гармоническая волна может быть изображена синусоидой (рис. 42).

<u>Расстояние между двумя ближайшими точками среды, колеблющимися в одинаковой фазе, называется длиной волны</u> λ (рис. 42). Эти точки по времени отстают друг от друга в колебаниях на один период T. Как оказалось величина $v = \dfrac{\lambda}{T}$ (или $v = \lambda \cdot \nu$, т.к. $\nu = \dfrac{1}{T}$) для заданной частоты колебаний в каждой среде имеет постоянное значение, зависящее от свойств среды, и получившее название скорости волны.

Для характеристики волны вводят еще одну величину, так называемое *<u>волновое число</u>* $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$. Учитывая, что $\lambda = \dfrac{v}{\nu}$ и $\omega = 2\pi \cdot \nu$ получим $k = \dfrac{\omega}{v}$.

<u>Геометрическое место точек, до которых в данный момент времени доходит волна называется волновым фронтом.</u> Фронт волны поверхность, форма которой задается формой источника волн. Самый простой фронт – сфера, волна в этом случае называется сферической. Источником сферической волны является точечный источник. Если источник – плоскость, то волна называется плоской, ее фронт плоскость.

<u>2.8.1. Уравнение бегущей волны. Фазовая скорость. Волновое уравнение.</u>

Бегущей называется волна, уносящая в пространство энергию колебаний источника. Для вывода уравнения бегущей волны, т.е. зависимости смещения точки от координаты и времени рассмотрим случай плоской волны, т.е. $y = f(x,t)$.

Пусть точка O (рис. 43) совершает гармонические колебания $y = A_0 \cdot \cos\omega t$. До точки B с координатами (x,0) колебание дойдет за время $\tau = \dfrac{x}{v}$. Поэтому колебание в точке B будет отставать по фазе на величину, зависящую от расстояния x точки B от источника.

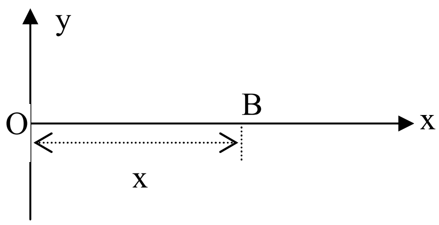

Рис. 43.

Колебания точки В будут описываться уравнением $y = A_0 \cdot \cos(\omega t - \omega\tau) = A_0 \cdot \cos\left(\omega t - \omega \cdot \frac{x}{v}\right)$, но $k = \frac{\omega}{v}$ и тогда $y = A_0 \cdot \cos(\omega t - kx)$. Это и есть уравнение бегущей волны.

В силу периодичности гармонической функции вдоль бегущей волны с интервалом λ располагаются точки, колеблющиеся в одинаковой фазе. Это обусловлено зависимостью фазы колебания от координаты x. В то же время эта фаза изменяется, так как она зависит от t.

Фаза колебания $\alpha = \omega t - kx$ является сложной функцией $\alpha = f(x,t)$, где $x = f_1(t)$. Это означает, что каждому моменту времени данной фазе α соответствует новая координата x.

Предположим, что фаза колебания остается величиной постоянной, т.е. $\alpha = \omega t - kx = \text{const}$, тогда $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, следовательно, $\omega - k\frac{dx}{dt} = 0$ или $v = \frac{\omega}{k}$.

Мы видим, что скорость, введенная ранее как $v = \frac{\lambda}{T}$, есть скорость движения одной и той же фазы в среде. Эта скорость получила название *фазовой скорости.* Фазовая скорость зависит от частоты колебаний. Это явление получило название дисперсии, с среда называется диспергирующей. Фазовая скорость зависит от свойств среды. Так в случае упругих сред установлено, что $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, где E - модуль упругости (модуль Юнга), а ρ - плотность среды.

Легко убедиться в том, что полученное уравнение бегущей волны является решением дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Уравнение бегущей волны в общем случае имеет вид

$$\xi = \xi_0 \cdot \cos(\omega t - kr),$$

где r - радиус вектор точки, а k - волновой вектор.

Распространение волн в однородной изотропной среде в общем случае описывается дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

которое называется *волновым уравнением*.

3.8.1. Энергия волны. Объемная плотность энергии. Плотность потока энергии. Вектор Умова.

Мы уже указывали, что основное свойство волны перенос энергии без переноса массы вещества. Для определения энергии волны рассмотрим для простоты плоскую синусоидальную волну $y = A \cdot \cos(\omega t - kx)$.

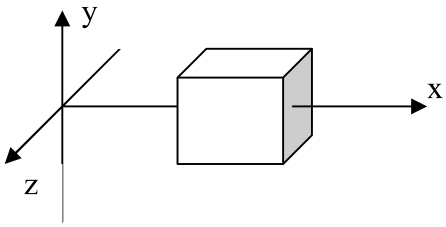

Рис. 44

Выделим элементарный объем среды $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, массой dm (рис. 44). Этот элемент среды находится в состоянии волнового движения и следовательно обладает полной механической энергией dE, которая слагается из потенциальной энергии dU и кинетической энергии dT.

Кинетическая энергия частиц $dT = \frac{dm \cdot v^2}{2}$. Скорость частиц среды $v = \frac{dy}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - kx)$, а $dm = \rho \cdot dV$ и тогда $dT = \frac{\rho \cdot dV \cdot A^2 \cdot \omega^2}{2} \sin^2(\omega t - kx)$.

Потенциальную энергию упруго деформированной среды можно найти по формуле

$$dU = \frac{1}{2} E \cdot dV \cdot \varepsilon^2,$$

где $\varepsilon = \frac{dy}{dx} = -A \cdot k \cdot \sin(\omega t - kx)$ - относительная деформация и тогда

$$dU = \frac{1}{2} E \cdot dV \cdot A^2 \cdot k^2 \sin^2(\omega t - kx),$$

учитывая, что $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ и $k = \frac{\omega}{v}$ последнее выражение можно преобразовать к виду

$$dU = \frac{\rho \cdot dV \cdot A^2 \cdot \omega^2}{2} \sin^2(\omega t - kx).$$

Для полной энергии выделенного объема получим выражение $dE = \rho \cdot dV \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$. Заменив, $\sin^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2(\omega t - kx)\right)$ получим

$$dE = \frac{\rho \cdot dV \cdot A^2 \cdot \omega^2}{2}\left(1 - \cos 2(\omega t - kx)\right).$$

Так как среднее значение $\cos 2(\omega t - kx)$ за период равно нулю, окончательно получим

$$dE = \frac{\rho \cdot dV \cdot A^2 \cdot \omega^2}{2}.$$

Величину $w = \frac{dE}{dV}$ будем называть *<u>объемной плотностью энергии</u>* и тогда для волны $w = \frac{\rho \cdot A^2 \cdot \omega^2}{2}$.

Количество энергии переносимой через некоторую поверхность dS в единицу времени называется *<u>потоком энергии</u>* <u>$d\Phi$</u> через эту поверхность

$$d\Phi = \frac{dE}{dt}.$$

Для характеристики переноса энергии волной в различных точках среды вводят величину называемую *<u>плотностью потока энергии</u>* <u>j</u>, которая определяется энергией переносимой в единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению скорости волны, т.е.

$$j = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{dE}{dS \cdot st}.$$

Учитывая, что $dE = w \cdot dV$ получим, $j = \frac{w \cdot dV}{dS \cdot dt} = \frac{w \cdot dS \cdot dx}{dS \cdot dt} = w \cdot \frac{dx}{dt} = w \cdot v$.

Так как w - скаляр, а v-вектор и перенос энергии осуществляется в направлении распространения волны, то $\vec{j} = \omega \cdot \vec{v}$ - *<u>вектор Умова</u>*.

<u>4.8.1. Интерференция волн.</u>

Если в среде одновременно распространяется несколько волн, то частицы среды одновременно участвуют в нескольких волновых движениях, причем для волн справедлив принцип суперпозиции (наложения). Принцип суперпозиции означает, что каждая волна распространяется в среде независимо от наличия других волн.

<u>Явление наложения двух или нескольких когерентных волн, приводящее к образованию устойчивой картины распределения максимумов и минимумов плотности потока энергии, называется ци-ей волн.</u>

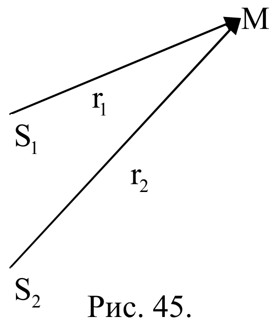

Рис. 45.

<u>Когерентными называются волны, имеющие одинаковую длину волны и постоянную во времени разность фаз</u>.

Рассмотрим интерференцию двух сферических волн распространяющихся от источников S_1 и S_2 (рис. 45). Так как для когерентных волн разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = const$, предположим, что $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Тогда волны излучаемые источниками в точке М будут описываться уравнениями:

$$\xi_1 = \frac{A_0}{r_1}\cos(\omega t - kr_1)$$
$$\xi_2 = \frac{A_0}{r_2}\cos(\omega t - kr_2),$$

где r_1 и r_2 - расстояния от источников до рассматриваемой точки М.

Амплитуда результирующего колебания в точке М будет равна

$$A^2 = A_0^2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 \cdot r_2}\cos k(r_2 - r_1)\right).$$

Из этого выражения следует, что амплитуда результирующего колебания в точке М зависит от величины $(r_2 - r_1) = \Delta$ и называемой разностью хода волн. Если:

а) $k(r_2 - r_1) = m \cdot 2\pi$, то $A^2 = A_0^2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)^2$ или $A = A_0\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)$ и в точке М будет наблюдаться <u>*максимум*</u>;

б) $k(r_2 - r_1) = (2m+1)\pi$, то $A = A_0\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$ - <u>*интерференционный минимум.*</u>

Из условия $k(r_2 - r_1) = m \cdot 2\pi$ с учетом того, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ и $r_2 - r_1 = \Delta$ можно получить условие наблюдения интерференционного максимума $\Delta = \pm m \cdot \lambda$, а из условия $k(r_2 - r_1) = (2m+1)\pi$ следует, что минимум интерференции наблюдается в случае, если $\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$.

<u>*5.8.1. Стоячие волны.*</u>

Особым случаем интерференции (широко распространенном на практике) являются стоячие волны, образующиеся при интерференции двух волн, распространяющихся навстречу друг другу.

Для вывода уравнения стоячей волны предположим, что волны распространяются навстречу друг другу вдоль оси «х» и имеют одинаковую амплитуду и частоту. Уравнения волн в этом случае будут иметь вид:

$$y_1 = A\cos(\omega t + kx)$$
$$y_2 = A\cos(\omega t - kx).$$

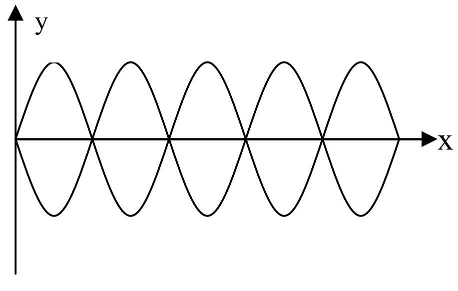

Рис. 46

Сложив эти колебания, получим:

$$y = 2A\cos kx \cdot \cos\omega t.$$

Из этого уравнения следует, что в каждой точке среды происходят колебания с частотой ω и амплитудой $|2A\cos kx|$, зависящей от координаты «х» рассматриваемой точки (рис. 46). В точках среды удовлетворяющих условию:

$kx = m\pi$ амплитуда достигает максимума равного 2А и эти точки называются пучностями стоячей волны;

$kx = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$ амплитуда будет равна нулю – узел.

Из этих выражений можно найти координаты пучностей $x = m \cdot \frac{\lambda}{2}$ и узлов $x = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{2}$. Следовательно, расстояние между соседними узлами или пучностями равно $\frac{\lambda}{2}$.

В бегущей волне точки среды колеблются с одинаковой амплитудой, но с запаздыванием по фазе. В стоячей волне все точки, расположенные между двумя узлами, колеблются с различной амплитудой, но в одной фазе. При переходе через узел фаза колебания меняется на π, но также остается постоянной.

Обычно образование стоячих волн наблюдается при интерференции падающей и отраженной волн. Если среда, от которой происходит отражение, является более плотной, то в этой точке будет наблюдать узел, так как при отражении происходит потеря полуволны. Если среда, от которой отражается волна, является менее плотной, то в точке отражения будет пучность.

6.8.1. Характеристики звуковых волн.

Звук представляет собой колебания упругой среды, воспринимаемые нашими органами слуха. Человеческое ухо способно воспринимать колебания, частота которых лежит в пределах от 16 до 20000 Гц.

Музыкальным тоном мы называем звук, которому соответствует одна строго определенная частота. Высота тона определяется частотой колебания, чем больше частота, тем выше тон.

Звуки с различными частотами получили название шумов.

Для характеристики звука целесообразнее ввести энергетическую характеристику. *Интенсивностью звука* называется величина равная энергии переносимой звуковой волной в единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению распространения звука, т.е. модуль среднего значения плотности потока энергии

$$I = \frac{dW}{dS \cdot dt}.$$

Если интенсивность звука является объективной величиной, характеризующей волновой процесс, то субъективной характеристикой звука, связанной с его интенсивностью, является громкость звука. По физиологическому закону Вебера-Фехнера, с ростом интенсивности звука, громкость возрастает по логарифмическому закону, т.е. при увеличении интенсивности в 100 раз громкость возрастает в 2 раза.

Поэтому для оценки громкости звука вводится величина L, называемая уровнем громкости

$$L = \lg\frac{I}{I_0},$$

где $I_0 = 10^{-12}\ \frac{Вт}{м^2}$ порог слышимости. Громкость звука измеряется в белах. На практике обычно используется единица в 10 раз меньшая – децибел.

7.8.1. Эффект Доплера в акустике.

Эффектом Доплера называется изменение частоты колебаний, воспринимаемых приемником, при движении источника этих колебаний и приемника относительно друг друга.

Для простоты рассуждений будем считать, что источник и приемник движутся вдоль соединяющей их прямой; v_1 - скорость источника, v_2 - скорость приемника, причем они положительны в случае сближения и отрицательны при удалении источника и приемника звука. Частота колебаний источника ν_0.

Рассмотрим частные случаи:

а) источник и приемник покоятся. Так как скорость распространения волн в среде v, то частота колебаний воспринимаемой приемником равна ν_0.

б) Источник покоится, приемник приближается к нему, т.е. $v_1 = 0,\quad v_2 > 0$. Скорость распространения волны относительно приемника в этом случае равна $v + v_2$, а так как длина волны не изменяется, то:

$$\nu = \frac{v + v_2}{\lambda} = \nu_0\frac{v + v_2}{v},$$

т.е. частота колебаний увеличивается.

в) приемник покоится, источник приближается к нему, т.е. $v_2 = 0,\quad v_1 > 0$. В этом случае длина волны излучаемой источником $\lambda' = \lambda - v_1 \cdot T = \left(v - v_1\right)T$. Так как скорость распространения волны в этом случае не изменяется, то

$$\nu = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\left(v - v_1\right)T} = \nu_0\frac{v}{v - v_1},$$

частота также возрастает.

Изменение направления движения источника и приемника в случаях б) и в) приводит к изменению знака скорости и уменьшению частоты колебаний воспринимаемых приемником.

Используя результаты, полученные в случаях б) и в) можно получить, что в общем случае частота колебаний, воспринимаемых приемником определяется выражением

$$\nu = \nu_0\frac{v \pm v_2}{v \mp v_1}.$$

Верхние знаки соответствуют сближению источника и приемника, а нижние удалению их друг от друга.